

Analiza matematyczna IV. Kolokwium 1. Zestaw A. 21 IV 2026

Zadanie 1. Niech μ będzie miarą na σ -ciele zbiorów generowanych przez rodzinę przedziałów $\{(-\infty, b]: b \in \mathbb{Q}_+\}$ i taką, że $\mu((-\infty, b]) = b^2$ dla $b \in \mathbb{Q}_+$. Podaj przykłady zbiorów mierzalnych miary μ -zero. Czy istnieje zbiór mierzalny miary μ -zero o niepustym wnętrzu? Oblicz $\mu([2, \sqrt{5}])$.

Zadanie 2. Niech $A, B \subset \mathbb{R}$ będą zbiorami mierzalnymi. Wykaż mierzalność funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = (\chi_A(x) + 3)^{\chi_B(x)+1} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 3. Oblicz całkę

$$\int_A f(x) d\mu(x),$$

gdzie $A = ([0, 4] \setminus \mathbb{Q}_+) \cup \mathbb{N}$, $f(x) = 2^x + 3^x$, $\mu = \lambda_1 + \sum_{k=0}^{\infty} 6^{-k} \delta_k$.

Zadanie 4. Oblicz tłumacząc przejścia graniczne

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \chi_{[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]}(x) d\lambda_1(x).$$

Zadanie 5. Zbadaj zbieżność ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \sqrt{n} \chi_{[0, \frac{1}{n}]}(x^4)$$

w przestrzeniach $L^p[0, 1]$, $1 \leq p \leq \infty$, a także prawie wszędzie.

Analiza matematyczna IV. Kolokwium 1. Zestaw B. 21 IV 2026

Zadanie 1. Niech μ będzie miarą na σ -ciele zbiorów generowanych przez rodzinę przedziałów $\{(-\infty, c]: c \in \mathbb{Q}_+\}$ i taką, że $\mu((-\infty, c]) = c^2$ dla $c \in \mathbb{Q}_+$. Podaj przykłady zbiorów mierzalnych miary μ -zero. Czy istnieje zbiór mierzalny miary μ -zero o niepustym wnętrzu? Oblicz $\mu((\sqrt{3}, 5))$.

Zadanie 2. Niech $A, B \subset \mathbb{R}$ będą zbiorami mierzalnymi. Wykaż mierzalność funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = (\chi_A(x) + 2)^{\chi_B(x)+2} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 3. Oblicz całkę

$$\int_A f(x) d\mu(x),$$

gdzie $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1000]$, $f(x) = \ln(1 + \frac{1}{x})$, $\mu = \lambda_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k$.

Zadanie 4. Oblicz tłumacząc przejścia graniczne

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]} \cos^k x d\lambda_1(x).$$

Zadanie 5. Zbadaj zbieżność ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = n^{1/3} \chi_{[0, \frac{1}{n}]}(x^2)$$

w przestrzeniach $L^p[0, 1]$, $1 \leq p \leq \infty$, a także prawie wszędzie.