

Analiza matematyczna IV. Poprawa kolokwium I. Zestaw A. 16 VI 2026

Zadanie 1. Niech $X = \mathbb{N}$ i niech $\mu^*(A) = \begin{cases} \frac{\bar{A}}{1+\bar{A}} & \text{jeśli } \bar{A} < \infty, \quad A \subseteq X \\ 1 & \text{jeśli } \bar{A} = \infty, \quad A \subseteq X \end{cases}$.

Udowodnić, że μ^* jest miarą zewnętrzną. Wyznaczyć rodzinę zbiorów mierzalnych.

Zadanie 2. Niech $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, będą funkcjami ciągłymi. Zbadaj, czy zbiór

$$A = \{x \in \mathbb{R}: \text{ciąg } (f_n(x)) \text{ jest zbieżny do liczby nieujemnej}\}$$

jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.

Zadanie 3. Oblicz całkę $\int_A f(x) d\mu(x)$, gdzie $A = (\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}_+) \cup \mathbb{N}$,

$$f(x) = e^{-x} \cos(\pi x) + \chi_{[0,20]}(x)2^x, \quad \mu = \lambda_1 + \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \delta_k.$$

Zadanie 4. Oblicz tłumacząc przejścia graniczne

$$\int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cos(nx)}{3^n} d\lambda_1(x).$$

Zadanie 5. Zbadaj zbieżność ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = x + 2^n \chi_{\mathbb{Q}}(x) + \frac{x}{n} + 2\sqrt[3]{n} \chi_{[0, \frac{1}{n}]}(x^2)$$

w przestrzeniach $L^p[0, 1]$, $1 \leq p \leq \infty$, a także prawie wszędzie.

Analiza matematyczna IV. Poprawa kolokwium I. Zestaw B. 16 VI 2026

Zadanie 1. Niech $X = \mathbb{N}$ i niech $\mu^*(A) = \begin{cases} \frac{\bar{A}}{1+\bar{A}} & \text{jeśli } \bar{A} < \infty, \quad A \subseteq X \\ 1 & \text{jeśli } \bar{A} = \infty, \quad A \subseteq X \end{cases}$. Udowodnić, że μ^* jest miarą zewnętrzną. Wyznaczyć rodzinę zbiorów mierzalnych.

Zadanie 2. Niech $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, będą funkcjami ciągłymi. Zbadaj, czy zbiór

$$A = \{x \in \mathbb{R}: \text{ciąg } (f_n(x)) \text{ jest zbieżny do liczby niedodatniej}\}$$

jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.

Zadanie 3. Oblicz całkę $\int_A f(x) d\mu(x)$, gdzie $A = (\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}_+) \cup \mathbb{N}$,

$$f(x) = e^{-x} \cos(\pi x) + \chi_{[0,10]}(x)3^x, \quad \mu = \lambda_1 + \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \delta_k.$$

Zadanie 4. Oblicz tłumacząc przejścia graniczne

$$\int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cos(nx)}{4^n} d\lambda_1(x).$$

Zadanie 5. Zbadaj zbieżność ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = 2^x + n \chi_{\mathbb{Q}}(x) + \frac{x}{n} + \sqrt[4]{n} \chi_{[0, \frac{1}{n}]}(x^2)$$

w przestrzeniach $L^p[0, 1]$, $1 \leq p \leq \infty$, a także prawie wszędzie.