Analiza matematyczna IV. Kolokwium 2. Zestaw A. 2 VI 2026

Zadanie 1. Sprawdź, czy dana 1-forma

$$\omega(x,y,z) = (e^x yz^2 + y^2 + z + 1)\,dx + (e^x z^2 + 2xy + 2yz^2)\,dy + (2e^x yz + x + 2y^2 z)\,dz$$

jest dokładna. Jeśli tak, to znajdź 0-formę η, taką że $\omega = d\eta$.

Zadanie 2. Dla danej 1-formy $\omega = (y+1)\,dx + (z-1)\,dy + (x+2)\,dz$ i 2-komórki $c\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$ danej wzorem $c(u,v) = (-1, 2u, 2v+1)$: a) oblicz $d\omega$; b) oblicz bezpośrednio $\int_c d\omega$; c) wylicz 1-łańcuch ∂c; d) oblicz bezpośrednio $\int_{\partial c} \omega$ i sprawdź, czy zgodnie z twierdzeniem Stokesa dostaniemy to samo co w b).

Zadanie 3. Niech Σ — część sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ odcięta płaszczyznami $z = -2$ i $z = 2$. Oblicz całkę powierzchniową niezorientowaną

$$\int_\Sigma y^2 + z^2\,d\mu_s.$$

Zadanie 4. Wyznacz wersor normalny $n(p)$ skierowany na zewnątrz do powierzchni bocznej walca Σ zadanego równaniem $x^2 + y^2 = 16$ i ograniczonego powierzchniami $z = -1$ i $z = 3$ w punkcie $p \in \Sigma$, a następnie oblicz całkę powierzchniową zorientowaną $\int_\Sigma \omega$ dla $\omega = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$ korzystając ze wzoru

$$\int_\Sigma \omega_1\,dy \wedge dz + \omega_2\,dz \wedge dx + \omega_3\,dx \wedge dy = \int_\Sigma \Big(\omega_1(p), \omega_2(p), \omega_3(p)\Big) \cdot n(p)\,d\mu_S(p).$$

Zadanie 5. Oblicz całkę powierzchniową zorientowaną $\int_\Sigma \omega$ jeśli: $\omega(x,y,z) = 2\,dy \wedge dz + 2\,dz \wedge dx + 2\,dx \wedge dy$, Σ — zewnętrzna strona powierzchni stożka $z = \sqrt{x^2+y^2}$ zawartego między płaszczyznami $z = 1$, $z = 3$.

Analiza matematyczna IV. Kolokwium 2. Zestaw B. 2 VI 2026

Zadanie 1. Sprawdź, czy dana 1-forma

$$\omega(x,y,z) = (ze^{xz}\sin y + e^{x+y} + \sin z)\,dx + (e^{xz}\cos y - \sin y + e^{x+y})\,dy + (xe^{xz}\sin y + x\cos z + e^z)\,dz$$

jest dokładna. Jeśli tak, to znajdź 0-formę η, taką że $\omega = d\eta$.

Zadanie 2. Dla danej 1-formy $\omega = 2y\,dx - z\,dy + x\,dz$ i 2-komórki $c\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$ danej wzorem $c(u,v) = (1, 4u-1, 2v)$: a) oblicz $d\omega$; b) oblicz bezpośrednio $\int_c d\omega$; c) wylicz 1-łańcuch ∂c; d) oblicz bezpośrednio $\int_{\partial c} \omega$ i sprawdź, czy zgodnie z twierdzeniem Stokesa dostaniemy to samo co w b).

Zadanie 3. Niech Σ — część sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ odcięta płaszczyznami $z = 0$ i $z = \sqrt{2}$. Oblicz całkę powierzchniową niezorientowaną

$$\int_\Sigma y^2 + z^2\,d\mu_s.$$

Zadanie 4. Wyznacz wersor normalny $n(p)$ skierowany na zewnątrz do powierzchni bocznej walca Σ zadanego równaniem $x^2 + y^2 = 9$ i ograniczonego powierzchniami $z = 0$ i $z = 4$ w punkcie $p \in \Sigma$, a następnie oblicz całkę powierzchniową zorientowaną $\int_\Sigma \omega$ dla $\omega = 2x\,dy \wedge dz + 2y\,dz \wedge dx + 2z\,dx \wedge dy$ korzystając ze wzoru

$$\int_\Sigma \omega_1\,dy \wedge dz + \omega_2\,dz \wedge dx + \omega_3\,dx \wedge dy = \int_\Sigma \Big(\omega_1(p), \omega_2(p), \omega_3(p)\Big) \cdot n(p)\,d\mu_S(p).$$

Zadanie 5. Oblicz całkę powierzchniową zorientowaną $\int_\Sigma \omega$ jeśli: $\omega(x,y,z) = x^2\,dy \wedge dz + y^2\,dz \wedge dx + z^2\,dx \wedge dy$, Σ — zewnętrzna strona powierzchni stożka $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z \leqslant 2$.