

Analiza matematyczna IV. Poprawa kolokwium II. Zestaw C. 16 VI 2026

Zadanie 1. Sprawdź, czy dana 1-forma

$$\omega(x, y, z) = (\cos x e^{xyz} z^2 + \sin x e^{xyz} y z^3 + e^x y + z) dx + (\sin x e^{xyz} x z^3 + e^x - z \sin(yz)) dy + (\sin x e^{xyz} x y z^2 + 2 \sin x e^{xyz} z - y \sin(yz) + x) dz$$

jest dokładna. Jeśli tak, to znajdź 0-formę η , taką że $\omega = d\eta$.

Zadanie 2. Dla danej 1-formy $\omega(x, y, z) = (2z - 1) dx + (x + 3) dy + (3y + 1) dz$ i 2-komórki $c: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ danej wzorem $c(u, v) = (u, 2u, v + 1)$: a) oblicz $d\omega$; b) oblicz bezpośrednio $\int_c d\omega$; c) wylicz 1-łańcuch ∂c ; d) oblicz bezpośrednio $\int_{\partial c} \omega$ i sprawdź, czy zgodnie z twierdzeniem Stokesa dostaniemy to samo co w b).

Zadanie 3. Niech Σ — zbiór opisany przez warunki $y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$ i $0 \leq x \leq 2$. Oblicz całkę powierzchniową niezorientowaną

$$\int_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) d\mu_S.$$

Zadanie 4. Wyznacz wektor normalny $n(p)$ skierowany do wnętrza półsfery Σ zadanej równaniem $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ i $z \leq 0$ w punkcie $p \in \Sigma$, a następnie oblicz całkę powierzchniową zorientowaną $\int_{\Sigma} \omega$ dla $\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$ korzystając ze wzoru

$$\int_{\Sigma} \omega_1 dy \wedge dz + \omega_2 dz \wedge dx + \omega_3 dx \wedge dy = \int_{\Sigma} (\omega_1(p), \omega_2(p), \omega_3(p)) \cdot n(p) d\mu_S(p).$$

Zadanie 5. Oblicz całkę powierzchniową zorientowaną $\int_{\Sigma} \omega$ jeśli: $\omega(x, y, z) = x dy \wedge dz + z dx \wedge dy$, Σ — zewnętrzna strona powierzchni bocznej walca $x^2 + y^2 = 1$ zawartego między płaszczyznami $z = -2$ i $z = 2$.

Analiza matematyczna IV. Poprawa kolokwium II. Zestaw D. 16 VI 2026

Zadanie 1. Sprawdź, czy dana 1-forma

$$\omega(x, y, z) = (-\sin x e^{xyz} z^2 + \cos x e^{xyz} y z^3 + e^x y + z) dx + (\cos x e^{xyz} x z^3 + e^x + z \cos(yz)) dy + (\cos x e^{xyz} x y z^2 + 2 \cos x e^{xyz} z + y \cos(yz) + x) dz$$

jest dokładna. Jeśli tak, to znajdź 0-formę η , taką że $\omega = d\eta$.

Zadanie 2. Dla danej 1-formy $\omega(x, y, z) = (z - 1) dx + (2x + 1) dy + (3y + 2) dz$ i 2-komórki $c: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ danej wzorem $c(u, v) = (2u, u, v + 1)$: a) oblicz $d\omega$; b) oblicz bezpośrednio $\int_c d\omega$; c) wylicz 1-łańcuch ∂c ; d) oblicz bezpośrednio $\int_{\partial c} \omega$ i sprawdź, czy zgodnie z twierdzeniem Stokesa dostaniemy to samo co w b).

Zadanie 3. Niech Σ — zbiór opisany przez warunki $y^2 + z^2 = 1$, $z \leq 0$ i $0 \leq x \leq 1$. Oblicz całkę powierzchniową niezorientowaną

$$\int_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) d\mu_S.$$

Zadanie 4. Wyznacz wektor normalny $n(p)$ skierowany do wnętrza półsfery Σ zadanej równaniem $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ i $z \geq 0$ w punkcie $p \in \Sigma$, a następnie oblicz całkę powierzchniową zorientowaną $\int_{\Sigma} \omega$ dla $\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$ korzystając ze wzoru

$$\int_{\Sigma} \omega_1 dy \wedge dz + \omega_2 dz \wedge dx + \omega_3 dx \wedge dy = \int_{\Sigma} (\omega_1(p), \omega_2(p), \omega_3(p)) \cdot n(p) d\mu_S(p).$$

Zadanie 5. Oblicz całkę powierzchniową zorientowaną $\int_{\Sigma} \omega$ jeśli: $\omega(x, y, z) = x dy \wedge dz + z dx \wedge dy$, Σ — zewnętrzna strona powierzchni bocznej walca $x^2 + y^2 = 4$ zawartego między płaszczyznami $z = -1$ i $z = 1$.