

Przykładowe zadania z analizy matematycznej IV. Część I.

Zadanie 1. Niech $\mathbf{M}$ i $\mathbf{N}$ będą σ -algebrami w zbiorze X , Czy następujące rodziny są σ -algebrami w X :

1. $\mathbf{M} \cap \mathbf{N} := \{A \subseteq X: A \in \mathbf{M} \text{ i } A \in \mathbf{N}\},$
2. $\mathbf{M} \cup \mathbf{N} := \{A \subseteq X: A \in \mathbf{M} \text{ lub } A \in \mathbf{N}\}.$

Zadanie 2. Sprawdź, czy rodzina $\mathbf{M}$ podzbiorów niepustego zbioru X tworzy σ -algebrę:

1. $\mathbf{M} := \{\emptyset, X\},$
2. $\mathbf{M} := \{A \subseteq X\}$ (rodzina wszystkich podzbiorów X),
3. $\mathbf{M} := \{\emptyset, A, X\}$, gdzie $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$, $A \neq X$,
4. $\mathbf{M} := \{(a, b) \subseteq \mathbb{R}: a \leq b\},$
5. $\mathbf{M} := \{A \subseteq \mathbb{R}: A := \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n), a_n \leq b_n\}.$

Zadanie 3. Wykaż, że jeżeli $\mathbf{M}$ jest σ -ciałem podzbiorów X i $Z \subseteq X$ to rodzina zbiorów $\{A = B \cap Z: B \in \mathbf{M}\}$ jest σ -ciałem podzbiorów Z . W szczególności, jeżeli $Z \in \mathbf{M}$, to $\{A \subseteq Z: A \in \mathbf{M}\}$ jest σ -ciałem podzbiorów Z .

Zadanie 4. Niech $\mathbf{M}$ będzie σ -algebrą wszystkich podzbiorów w X . Sprawdź, czy funkcja $\mu: \mathbf{M} \rightarrow [0, \infty]$ jest miarą na X :

1. $\mu(A) = 0$ dla każdego $A \in \mathbf{M}$,
2. $\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x_0 \in A \\ 0 & \text{jeśli } x_0 \notin A \end{cases}$ dla każdego $A \in \mathbf{M}$, gdzie $x_0 \in X$ — ustalone,
3. $\mu(A) = 2|A|$, gdzie $|A|$ oznacza liczbę elementów zbioru A ,

Zadanie 5. Niech $(X, \mathbf{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą. Wykazać, że rodzina

$$\mathbf{N} := \{A \in \mathbf{M}: \mu(A) = 0 \text{ lub } \mu(X \setminus A) = 0\}$$

jest σ -algebrą.

Zadanie 6. Niech $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, będą funkcjami ciągłymi. Czy wówczas poniżej podane zbiory są mierzalne w sensie Lebesgue'a?

1. $A = \{x \in \mathbb{R}: \text{ciąg } (f_n(x)) \text{ jest ograniczony}\},$
2. $B = \{x \in \mathbb{R}: \text{ciąg } (f_n(x)) \text{ jest monotonicznie malejący do zera}\},$
3. $C = \{x \in \mathbb{R}: \text{ciąg } (f_n(x)) \text{ dąży do liczby niewymiernej}\}.$

Zadanie 7. Niech $A \subseteq [0, 1]$ zbiór punktów dla których istnieje rozwinięcie dziesiętne niezawierające dwóch kolejnych dwójek. Wykazać, że A ma miarę Lebesgue'a zero.

Zadanie 8. Niech $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Wyraż za pomocą funkcji charakterystycznych zbiorów $\chi_A(x)$, $\chi_B(x)$ i podaj warunki przy których te funkcje są mierzalne w sensie Lebesgue'a:

1. $\chi_{\mathbb{R} \setminus A}(x),$
2. $\chi_{A \cap B}(x),$
3. $\chi_{A \cup B}(x).$

Zadanie 9. Sprawdź, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} & \text{dla } x > 0 \\ \frac{-1}{x} & \text{dla } x < 0 \\ +\infty & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest mierzalna w sensie Lebesgue'a. Skonstruuj niemalejący ciąg funkcji prostych zbieżny do niej punktowo. Narysuj dwa początkowe wyrazy tego ciągu.

Zadanie 10. Wykazać mierzalność w sensie Lebesgue'a funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}) \\ -x & \text{dla } x \in (\mathbb{R}_- \setminus \mathbb{Q}) \\ 0 & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Zadanie 11. Niech $u_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami mierzalnymi takimi, że $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ jest zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Pokazać, że wówczas funkcja $u(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ jest funkcją mierzalną.

Zadanie 12. Niech funkcja $f(z)$ będzie równa

1. $f(z) = (-1)^n 2^n$,
2. $f(z) = n(i)^n$

na każdym przedziale o długości $\frac{1}{3^n}$ „usuniętym” podczas n -tego kroku konstrukcji zbioru Cantora. Oblicz

$$\int_{(0,1)} f d\lambda_1.$$

Zadanie 13. Oblicz całki Lebesgue'a:

1. $\int_{(0,1]} \frac{1}{x} d\lambda_1(x),$
2. $\int_{(0,1]} \frac{1}{\sqrt{x}} d\lambda_1(x),$
3. $\int_{(2,3]} \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} d\lambda_1(x),$
4. $\int_{[-1,1]} \frac{1}{\sqrt{|x|}} d\lambda_1(x),$
5. $\int_{[-1,1]} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d\lambda_1(x).$

Zadanie 14. Sprawdź, czy następujące funkcje są całkowne:

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} & \text{dla } x \in [1, 3] \setminus \{2\} \\ -1 & \text{dla } x = 2 \end{cases},$
2. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{dla } x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}.$

Zadanie 15. Pokaż, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 2n & \text{dla } x \in (\frac{2n+1}{2n(n+1)}, \frac{1}{n}] \\ -n & \text{dla } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{2n+1}{2n(n+1)}] \end{cases} \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

jest całkowna w sensie Lebesgue'a na każdym z przedziałów $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, $n = 1, 2, \dots$, ale nie jest całkowna na $(0, 1]$.

Zadanie 16. Pokaż, że funkcja $f: (0, 1) \rightarrow [0, 1]$ zdefiniowana jako $f(x) := 2^n(x - 2^{-n})$ dla $x \in [2^{-n}, 2^{-n+1})$, $n \in \mathbb{N}$, posiada nieskończenie wiele punktów nieciągłości i oblicz $\int_{(0,1)} f d\lambda_1$. Czy f jest całkowalna w sensie Lebesgue'a na $(0, 1)$?

Zadanie 17. Oblicz:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[1, \infty)} \frac{(x-1)^n}{(x-1)^n x^2 + 1} d\lambda_1(x),$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, \infty)} \frac{x^n + 2}{x^n + 1} e^{-x} d\lambda_1(x),$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, \infty)} \frac{n \sin(x/n)}{x(1+x^2)} d\lambda_1(x).$