Przykładowe zadania z analizy matematycznej IV. Część II.

Zadanie 18. Oblicz całki $\int_A f(x)\, d\mu(x)$, gdzie:

1. $A := \mathbb{R}_+, \quad f(x) := x^3, \quad \mu := \delta_{-2} + 2\delta_1 + 3\delta_2;$
2. $A := (2, 4], \quad f(x) = \ln x, \quad \mu := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \delta_n;$
3. $A := \mathbb{R}, \quad f(x) = (1/3)^x, \quad \mu := \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \delta_n;$
4. $A := \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \cos(\pi x), \quad \mu := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \delta_n;$
5. $A := [0, \pi/2], \quad f(x) = \cos x, \quad \mu := \lambda_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n;$
6. $A := \mathbb{R}, \quad f(x) = |x| \exp(-|x|), \quad \mu := \lambda_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} \delta_n.$

Zadanie 19. Zbadaj, czy skończone są całki $\int_A f(x)\, d\mu(x)$, gdzie:

1. $A := \mathbb{R}_+, \quad f(x) := \exp(-x) \sin(x^4 + \cos(x)), \quad \mu := \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \delta_n;$
2. $A := [1, \infty), \quad f(x) := \frac{\ln(x)}{\sin(x^2)}, \quad \mu := \lambda_1;$
3. $A = \mathbb{R}_+, \quad f(x) := 1/x, \quad \mu := \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n.$

Zadanie 20. Oblicz granice:

1. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(2+1/n)};$
2. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(1 + \frac{\min\{k, n\}}{n}\right).$

Zadanie 21. Oblicz pochodne $\frac{\partial}{\partial t} \int_A f(t, x)\, d\mu(x)$, gdzie:

1. $A := [1, 2], \quad f(t, x) := x^{-1} \cos(2\pi t x^3), \quad \mu := \lambda_1;$
2. $A := \mathbb{R}_+, \quad f(t, x) := \exp(tx), \quad \mu := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{n!}.$

Zadanie 22. Oblicz granicę całek:

1. $\lim_{n\to\infty} \int_A \left(x + \frac{1}{ny}\right)^2 d\lambda_2(x, y)$, gdzie A jest trójkątem o wierzchołkach $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$;
2. $\lim_{n\to\infty} \int_B \left(1 + \frac{x + y}{n}\right)^n e^{-x-y-z}\, d\lambda_3(x, y, z)$,
   gdzie $B := \{(x, y, z) \colon 0 < x + y < 1,\ z > 0,\ x > 0,\ y > 0\};$

3. $\lim_{n\to\infty} \int_C n \sin\left(\frac{xyz}{n^2}\right) \exp\left\{-\frac{x}{2} - \frac{y^2}{4} - z\right\} d\lambda_3(x, y, z)$,
   gdzie $S := \{(x, y, z) \colon x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}$.

4. $\lim_{n\to\infty} \int_D \left(1 + \left(\frac{x+y}{5}\right)^n\right) x\, d\lambda_2(x, y)$, gdzie $D := \{(x, y) \colon 1 < x < 2;\ -1 < y - x < 1\}$.

Zadanie 23. Obliczyć normy $L^p[0, 1]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, dla funkcji:

1. $f(x) := x^2$;

2. $f(x) := c\chi_{[a,b]}(x)$, gdzie $0 < a < b < 1$;

3. $f(x) := \exp(x)$;

4. $f(x) := |x - 1/2|$.

Zadanie 24. Zbadaj zbieżność poniższych ciągów funkcyjnych w przestrzeniach $L^p[0, 1]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, a także według miary oraz prawie wszędzie:

1. $f_n(x) := \sqrt{n}\chi_{[0,1/n]}(x)$,

2. $f_n(x) := \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{n}\right)$.