

## Przykładowe zadania z analizy matematycznej IV. Część III.

**Zadanie 25.** Niech  $e_1 = (1, 0)$  i  $e_2 = (0, 1)$ . Wyraż w terminach iloczynów tensorowych  $e_i \otimes e_j$  dla  $i, j = 1, 2$ :

1.  $(2, 1) \otimes (2, 3) + 3(1, -1) \otimes (-2, 1)$ ;
2.  $(-1, -2) \otimes (4, 3) - (3, 1) \otimes (1, 2)$ .

**Zadanie 26.** Niech  $e_1 = (1, 0)$  i  $e_2 = (0, 1)$ . Wyraż w terminach iloczynów zewnętrznych  $e_1 \wedge e_2$ :

1.  $(2, 1) \wedge (2, 3) + 3(1, -1) \wedge (-2, 1)$ ;
2.  $(-1, -2) \wedge (4, 3) - (3, 1) \wedge (1, 2)$ .

**Zadanie 27.** Dla danej  $k$ -formy różniczkowej  $\omega$  w  $\mathbb{R}^3$  znajdź  $d\omega$ :

1.  $\omega(x, y, z) = xy e^{xy^2z^3}$ ;
2.  $\omega(x, y, z) = xy \sin(z) dx + x^2 \cos(y) e^z dy + e^{x+y+z} dz$ ;
3.  $\omega(x, y, z) = (x + 2 \sin(z))y dy \wedge dz + \cos(x + y^2) dz \wedge dx + \sin(xy) e^z dx \wedge dy$ .

**Zadanie 28.** Sprawdź, czy dana  $k$ -forma  $\omega$  jest dokładna. Jeśli tak, to znajdź jakąś  $(k-1)$ -formę  $\eta$ , taką że  $\omega = d\eta$ :

1.  $\omega(x, y, z) = (y^2 e^z + 1) dx + (2xy e^z + 2y) dy + (xy^2 + 1) e^z dz$ ;
2.  $\omega(x, y, z) = dx + dy + dz$ ;
3.  $\omega(x, y, z) = dx + 2y dy + 3z^2 dz$ ;
4.  $\omega(x, y, z) = dy \wedge dz + dz \wedge dx + dx \wedge dy$ ;
5.  $\omega(x, y, z) = -y dy \wedge dz - z dz \wedge dx - x dx \wedge dy$ .

**Zadanie 29.** Niech  $f(r, t, h) = (r \cos t, r \sin t, h)$ . Oblicz  $f^*\omega$ , jeśli:

1.  $\omega(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ;
2.  $\omega(x, y, z) = x dx + y dy + z dz$ ;
3.  $\omega(x, y, z) = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$
4.  $\omega(x, y, z) = dx \wedge dy \wedge dz$ .

**Zadanie 30.** Niech  $f(r, \alpha, \beta) = (r \cos \alpha \cos \beta, r \sin \alpha \cos \beta, r \sin \beta)$ . Oblicz  $f^*\omega$ , jeśli:

1.  $\omega(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ;
2.  $\omega(x, y, z) = x dx + y dy + z dz$ ;
3.  $\omega(x, y, z) = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$
4.  $\omega(x, y, z) = dx \wedge dy \wedge dz$ .

**Zadanie 31.** Niech  $f(t, h) = (\cos t, r \sin t, h)$ . Oblicz  $f^*\omega$ , jeśli:

1.  $\omega(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ;
2.  $\omega(x, y, z) = x dx + y dy + z dz$ ;
3.  $\omega(x, y, z) = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$

4.  $\omega(x, y, z) = dx \wedge dy \wedge dz$ .

**Zadanie 32.** Niech  $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$ . Oblicz  $f^*\omega$ , jeśli:

1.  $\omega(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ;

2.  $\omega(x, y, z) = xdx + ydy + zdz$ ;

3.  $\omega(x, y, z) = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$

4.  $\omega(x, y, z) = dx \wedge dy \wedge dz$ .

**Zadanie 33.** Niech  $c: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  będzie 2-komórką daną przez  $c(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ . Oblicz 1-łańcuch  $\partial c$  i podaj geometryczny opis czterech 1-komórek, które tworzą jej brzeg.

**Zadanie 34.** Niech  $c: [0, 1]^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  będzie standardową 3-komórką  $I^3$  (tzn.  $c = Id$ ). Zapisz 2-łańcuch  $\partial c$  explicite jako formalną sumę sześciu 2-komórek pamiętając o znakach.

**Zadanie 35.** Dla danej 1-formy  $\omega = x dy - y dx$  i 1-komórki  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  danej wzorem  $c(t) = (1 + t, 2t)$  oblicz  $\int_c \omega$ .

**Zadanie 36.** Dla danej 2-formy  $\eta = x dy \wedge dz$  i 2-komórki  $c: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  danej wzorem  $c(u, v) = (uv, u, v)$  oblicz  $\int_c \eta$ .

**Zadanie 37.** Dla 1-formy  $d\theta = (\frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy)$  i 1-komórki  $C_{R,n}(t) = (R \cos(2\pi nt), R \sin(2\pi nt))$  dla  $t \in [0, 1]$  pokaż, że  $\int_{C_{R,n}} d\theta = 2\pi n$ .

**Zadanie 38.** Dla danej 1-formy  $\omega = z dx + x dy + y dz$  i 2-komórki  $c: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  danej wzorem  $c(u, v) = (u, v, 0)$ :

a) oblicz  $d\omega$ ;

b) oblicz bezpośrednio  $\int_c d\omega$ ;

c) wylicz 1-łańcuch  $\partial c$ ;

d) oblicz bezpośrednio  $\int_{\partial c} \omega$  i zweryfikuj, czy zgodnie z twierdzeniem Stokesa dostaniemy to samo co w b).

**Zadanie 39.** Dla danej 1-formy  $\omega = y dx + z dy$  i 2-sfery  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$

$$S^2 = \{(\sin \alpha \sin \beta, \cos \alpha \sin \beta, \cos \beta) : \alpha \in [0, 2\pi), \beta \in [0, \pi]\}$$

zweryfikuj przez bezpośrednie rachunki, że zachodzi twierdzenie Stokesa  $\int_{S^2} d\omega = 0$ .