Przykładowe zadania z analizy matematycznej IV. Część IV.

Zadanie 40. Oblicz podane całki krzywoliniowe niezorientowane $\int_\Gamma f \, d\mu_s$ jeśli:

1. $f(x, y) = xy$ i Γ — punkty o obu współrzędnych niewymiernych należące do brzegu kwadratu $|x| + |y| \leqslant 1$;
2. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ i Γ — okrąg $x^2 + y^2 = 2x$;
3. $f(x, y, z) = x + y + z$ i Γ — brzeg trójkąta o wierzchołkach $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0$ i $(0, 0, 1)$;
4. $f(x, y, z) = z^2$ i Γ — okrąg powstały z przecięcia sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i płaszczyzny $y = x$.

Zadanie 41. Oblicz podane całki powierzchniowe niezorientowane $\int_\Sigma f \, d\mu_s$ jeśli:

1. $f(x, y, z) = xz$ i Σ — płat o przedstawieniu parametrycznym $x = v \cos u$, $y = v \sin u$, $z = v$ dla $u \in [0, \pi]$, $v \in [3, 4]$;
2. $f(x, y, z) = xyz$ i Σ — część płaszczyzny $x + y + z = 1$ położona w pierwszym oktancie układu współrzędnych;
3. $f(x, y, z) = x^2 + z^2$ i Σ — część sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ odcięta płaszczyznami $z = 0$ i $z = 1$.
4. $f(x, y, z) = xyz$ i Σ — powierzchnia $y^2 = x$ odcięta płaszczyznami $z = 0$, $z = 4$ i $y = 1$, $y = 2$.

Zadanie 42. Oblicz podane całki krzywoliniowe zorientowane $\int_\Gamma \omega$ z 1-form ω po krzywej Γ jeśli:

1. $\omega(x, y, z) = yz \, dx - xz \, dy + xy \, dz$, $\Gamma : x = e^t$, $y = e^{3t}$, $z = e^{-t}$, gdzie $t \in [0, 1]$;
2. $\omega(x, y, z) = (x + z) \, dx + (x + y) \, dy + (y + z) \, dz$, Γ jest brzegiem trójkąta o kolejnych wierzchołkach $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$;
3. $\omega(x, y) = (3x + 2y) \, dx + (2x - y) \, dy$, Γ jest łukiem sinusoidy $y = \sin \frac{\pi x}{2}$ skierowanym od punktu $(0, 0)$ do $(1, 1)$.

Zadanie 43. Wyznaczyć wersory normalne do danej rozmaitości we wskazanych punktach:

1. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(-3, 4, 5)$;
2. $z = x^2 - y^2$, $(2, -1, 3)$.

Zadanie 44. Oblicz podane całki powierzchniowe zorientowane $\int_\Sigma \omega$ jeśli:

1. $\omega(x, y, z) = x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy$, Σ — górna strona powierzchni $z = 1 - x^2 - y^2$ odciętej płaszczyzną $z = 0$;
2. $\omega(x, y, z) = (x + y) \, dy \wedge dz + (y + z) \, dz \wedge dx + (z + x) \, dx \wedge dy$, Σ — dolna strona części płaszczyzny $x + y + z = 1$ odcięta płaszczyznami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;
3. $\omega(x, y, z) = x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy$, Σ — zewnętrzna strona powierzchni walca $z^2 = 1 - x^2$ zawartego między płaszczyznami $y = -2$, $y = 1$;
4. $\omega(x, y, z) = x \, dy \wedge dz + y^2 \, dz \wedge dx + z^3 \, dx \wedge dy$, Σ — zewnętrzna strona powierzchni sześcianu ograniczonego płaszczyznami $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$.

Zadanie 45. Obliczyć strumienie podanych pól wektorowych F przez wskazane powierzchnie Σ:

1. $F(x, y, z) = (z, -x, y)$, Σ — górna strona płaszczyzny $3x + 6y - 2z = 6$ odciętej płaszczyznami układu współrzędnych;
2. $F(x, y, z) = (x, x + y, z - x)$, Σ — zewnętrzna strona sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ leżąca w pierwszym oktancie układu współrzędnych.