Przykładowe zadania z analizy matematycznej IV. Część V.

Zadanie 46. Oblicz korzystając z twierdzenia Greena podane całki krzywoliniowe $\int_\Gamma \omega$ po krzywej Γ zorientowanej dodatnio względem zbioru który ogranicza, jeśli:

1. $\omega = 3xy\,dx + 2xy\,dy$ i Γ jest brzegiem prostokąta ograniczonego prostymi $x = -2$, $x = 4$, $y = 1$ i $y = 2$;

2. $\omega = (e^x + y^2)\,dx + (e^y + x^2)\,dy$ i Γ jest brzegiem obszaru ograniczonego wykresami funkcji $y = x^2$ i $y = x$;

3. $\omega = y\,\mathrm{tg}^2\,x\,dx + \mathrm{tg}\,x\,dy$ i Γ jest okręgiem $x^2 + (y+1)^2 = 1$.

Zadanie 47. Oblicz podane całki krzywoliniowe $\int_\Gamma \omega$ po wskazanych łukach i sprawdź otrzymany wynik wykorzystując twierdzenie Greena, jeśli:

1. $\omega = y^2\,dx + x^2\,dy$ i Γ jest krzywą będącą brzegiem kwadratu $[0,1]^2$ skierowanym dodatnio i rozpoczynającym i kończącym się w punkcie $(0,0)$;

2. $\omega = x\,dx + x\,dy$ i Γ jest okręgiem jednostkowym o środku w $(0,0)$ zorientowanym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Zadanie 48. Obliczyć podane całki krzywoliniowe z podanych pól wektorowych po wskazanych krzywych zorientowanych oraz sprawdzić otrzymane wyniki wykorzystując twierdzenie Stokesa:

1. $F(x,y,z) = (x-y, y-z, z-x)$, Γ — brzeg trójkąta zorientowany dodatnio o wierzchołkach $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$.

2. $F(x,y,z) = (2x, 3y, 4z)$, Γ — brzeg półsfery $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ zorientowany przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

3. $F(x,y,z) = (x^2+y^2, y^2+z^2, z^2+x^2)$, Γ — brzeg stożka $z = \sqrt{x^2+y^2}$ odciętego płaszczyzną $z = 1$ zorientowany przciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Zadanie 49. Obliczyć całki powierzchniowe z podanych pól wektorowych po wskazanych płatach zorientowanych oraz sprawdzić otrzymany wynik korzystając z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego:

1. $F(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)$, Σ — zorientowany na zewnątrz brzeg sześcianu ograniczonego płaszczyznami układu współrzędnych oraz $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

2. $F(x,y,z) = (x,y,z)$, Σ — zorientowana na zewnątrz sfera o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

3. $F(x,y,z) = (x+y, y+z, x+z)$, Σ — zorientowana na zewnątrz powierzchnia walca $x^2 + y^2 = 4$, ograniczonego powierzchniami $z = 0$ i $z = 1$.