

Przykładowe zadania z analizy matematycznej IV. Część VI.

Zadanie 50. Rozpatrzmy w $\mathbb{R}^3$ formę

$$\omega = x_1 dx_2 \wedge dx_3 - x_2 f(x_2) dx_1 \wedge dx_3 - x_3 f(x_2) dx_1 \wedge dx_2,$$

gdzie $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f(1) = 1$. Znaleźć te f dla których istnieje forma $\omega_1 = P(x)dx_1 + Q(x)dx_2$ taka, że $P(x_1, x_2, 0) = Q(x_1, x_2, 0) = 0$, $d\omega_1 = \omega$ i dla nich obliczyć $\int_{\partial S} \omega_1$, gdzie

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \sqrt{2}x_3 \geq 1\}.$$

Zadanie 51. Niech funkcja f ma gradient na obszarze $V \subseteq \mathbb{R}^3$ i niech pola wektorowe $F, G: V \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będą różniczkowalne na tym obszarze. Wykaż, że zachodzą wówczas wzory:

1. $\operatorname{rot}(aF + bG) = a \operatorname{rot} F + b \operatorname{rot} G$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$;
2. $\operatorname{rot}(fF) = (\operatorname{grad} f) \times F + f \operatorname{rot} F$.

Zadanie 52. Niech funkcja $f: V \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ oraz pola wektorowe $F, G: V \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będą różniczkowalne w sposób ciągły na obszarze $V \subseteq \mathbb{R}^3$. Wykaż, że zachodzą wówczas wzory:

1. $\operatorname{div}(aF + bG) = a \operatorname{div} F + b \operatorname{div} G$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$;
2. $\operatorname{div}(fF) = (\operatorname{grad} f) \circ F + f \operatorname{div} F$;
3. $\operatorname{div}(F \times G) = G \circ \operatorname{rot} F - F \circ \operatorname{rot} G$.