

Analiza matematyczna IV. Zakres materiału na egzamin ustny.

1. Ciało i σ -ciało zbiorów — definicja, przykłady, własności. Zbiory borelowskie, zbiory typu G_δ i F_σ .
2. Definicja miary na σ -ciele zbiorów i jej własności (Twierdzenie 2) wraz z dowodem.
3. Definicja miary zewnętrznej i warunku Caratheodory'ego, twierdzenie Caratheodory'ego (Twierdzenie 3).
4. Miara zewnętrzna metryczna, miara zewnętrzna Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$ i konstrukcja miary Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$.
5. Charakteryzacja zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a (Twierdzenie 7) wraz z dowodem.
6. Własności miary Lebesgue'a (Twierdzenia 8–12).
7. Funkcje mierzalne i ich własności (Twierdzenie 13).
8. Twierdzenie Łuzina (Twierdzenie 16), Frecheta (Twierdzenie 17) i Jegorowa (Twierdzenie 18).
9. Konstrukcja całki z funkcji nieujemnej i jej własności (Twierdzenia 19–21, 23).
10. Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej (Twierdzenie 22) wraz z dowodem.
11. Konstrukcja całki z funkcji mierzalnej dowolnego znaku (Definicja 17) i jej własności (Twierdzenie 24).
12. Lemat Fatou (Twierdzenie 25) i twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej (Twierdzenie 26) wraz z dowodami.
13. Twierdzenie o zamianie zmiennych (Twierdzenie 29), wnioski, zastosowania.
14. Twierdzenie Fubiego (Twierdzenie 30), wnioski, zastosowania.
15. Przestrzeń L_1 funkcji całkowalnych i jej własności (Twierdzenie 31).
16. Splot funkcji i jego własności. Twierdzenie 32 wraz z dowodem.
17. Tensory rzędu k , iloczyn tensorowy i jego własności (Lemat 13), baza tensorów rzędu k (Twierdzenie 35).
18. Tensory alternujące rzędu k , operator alternacji Alt i jego własności (Twierdzenie 36).
19. Iloczyn zewnętrzny tensorów alternujących i jego własności (Lemat 14), baza tensorów alternujących rzędu k (Twierdzenie 37).
20. Definicja form różniczkowych rzędu k na $\mathbb{R}^n$, 0-formy i 1-formy, ogólne przedstawienie k -formy za pomocą bazy dualnej $dx_1(p), \dots, dx_n(p)$.
21. Definicja różniczkowania zewnętrznego i jego własności (Twierdzenie 39) wraz z dowodem.
22. Formy zamknięte i dokładne oraz związek pomiędzy nimi. Lemat Poincaré (Twierdzenie 40) wraz z ideą dowodu.
23. Definicja n -komórki, n -łańcucha i brzegu łańcucha. Własności brzegu łańcucha (Twierdzenie 41) wraz z dowodem.
24. Odwzorowania f_* i f^* , własności f^* (Twierdzenia 42 i 43).
25. Konstrukcja całki z k -formy na k -łańcuchu, znaczenie szczególnego przypadku, gdy $k = 1$.
26. Twierdzenie Stokesa na łańcuchach (Twierdzenie 44) wraz z dowodem.
27. Konstrukcja miary Lebesgue'a na rozmaitości, σ -ciało zbiorów mierzalnych na rozmaitości S (Definicja 33), niezależność definicji od wyboru mapy, istnienie miary na rozmaitości (Twierdzenie 45).
28. Całki pierwszego rodzaju na rozmaitości (Definicja 34). Twierdzenie dające wzór na wyliczenie całek na rozmaitości (Twierdzenie 46) wraz z dowodem.
29. Wzór Cauchy'ego-Bineta (Twierdzenie 47) wraz z przykładami jego stosowania.
30. Orientacja rozmaitości (Definicje 35–39), charakteryzacja 1-wymiarowych rozmaitości orientowalnych w $\mathbb{R}^m$, 2-wymiarowych w $\mathbb{R}^3$, k -wymiarowych w $\mathbb{R}^{k+1}$ i k -wymiarowych w $\mathbb{R}^k$.

31. Definicja całek z form różniczkowych na rozmaitościach różniczkowych i poprawność tej definicji (Twierdzenie 50), Przypadki szczególne: całka z 1-formy na rozmaitości 1-wymiarowej, z 2-formy na rozmaitości 2-wymiarowej w $\mathbb{R}^3$, z k -formy na rozmaitości k -wymiarowej w $\mathbb{R}^{k+1}$ i z k -formy na rozmaitości k -wymiarowej w $\mathbb{R}^k$.
32. Rozmaitości z brzegiem (Definicja 40), orientacja brzegu (Definicja 41), przykłady.
33. Konstrukcja całki z k -formy na zorientowanej k -wymiarowej rozmaitości M .
34. Twierdzenie Stokesa dla rozmaitości (Twierdzenie 53) wraz z dowodem.
35. Wnioski wynikające z twierdzenia Stokesa dla rozmaitości: twierdzenie Greena (Twierdzenia 54), klasyczne Stokesa (Twierdzenie 55) i Gaussa-Ostrogradskiego (Twierdzenie 56), przykłady zastosowania.
36. Elementy analizy wektorowej w $\mathbb{R}^3$: operator Hamiltona (nabla), gradient funkcji, potencjalne pole wektorowe, rotacja pola wektorowego, dywergencja pola wektorowego i ich związki z formami różniczkowymi.
37. Twierdzenie Stokesa przy słabszych założeniach dotyczących gładkości formy (Twierdzenie 58) i punktów osobliwych brzegu (Twierdzenie 63), zbiory miary H_l -zero.
38. Zastosowanie twierdzenia Stokesa do dowodu twierdzenia całkowego Cauchy'ego (Twierdzenie 63 — uwaga: przez pomyłkę zdublowana numeracja) wraz z dowodem.
39. Zastosowanie twierdzenia Stokesa do dowodu nieistnienia retrakcji kuli na sferę (Twierdzenie 65) i twierdzenie Brouwera o punkcie stałym (Twierdzenie 66) wraz z ideą dowodów tych twierdzeń.