

### Analiza matematyczna IV. Zakres materiału na egzamin ustny. Część I

1. Ciało i  $\sigma$ -ciało zbiorów — definicja, przykłady, własności. Zbiory borelowskie, zbiory typu  $G_\delta$  i  $F_\sigma$ .
2. Definicja miary na  $\sigma$ -ciele zbiorów i jej własności (Twierdzenie 2) wraz z dowodem.
3. Definicja miary zewnętrznej i warunku Caratheodory'ego, twierdzenie Caratheodory'ego (Twierdzenie 3).
4. Miara zewnętrzna metryczna, miara zewnętrzna Lebesgue'a w  $\mathbb{R}^n$  i konstrukcja miary Lebesgue'a w  $\mathbb{R}^n$ .
5. Charakteryzacja zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a (Twierdzenie 7) wraz z dowodem.
6. Własności miary Lebesgue'a (Twierdzenia 8–12).
7. Funkcje mierzalne i ich własności (Twierdzenie 13).
8. Twierdzenie Łuzina (Twierdzenie 16), Frecheta (Twierdzenie 17) i Jegorowa (Twierdzenie 18).
9. Konstrukcja całki z funkcji nieujemnej i jej własności (Twierdzenia 19–21, 23).
10. Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej (Twierdzenie 22) wraz z dowodem.
11. Konstrukcja całki z funkcji mierzalnej dowolnego znaku (Definicja 17) i jej własności (Twierdzenie 24).
12. Lemat Fatou (Twierdzenie 25) i twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej (Twierdzenie 26) wraz z dowodami.
13. Twierdzenie o zamianie zmiennych (Twierdzenie 29), wnioski, zastosowania.
14. Twierdzenie Fubiego (Twierdzenie 30), wnioski, zastosowania.
15. Przestrzeń  $L_1$  funkcji całkowalnych i jej własności (Twierdzenie 31).
16. Splot funkcji i jego własności. Twierdzenie 32 wraz z dowodem.
17. Tensory rzędu  $k$ , iloczyn tensorowy i jego własności (Lemat 13), baza tensorów rzędu  $k$  (Twierdzenie 35).
18. Tensory alternujące rzędu  $k$ , operator alternacji Alt i jego własności (Twierdzenie 36).
19. Iloczyn zewnętrzny tensorów alternujących i jego własności (Lemat 14), baza tensorów alternujących rzędu  $k$  (Twierdzenie 37).
20. Definicja form różniczkowych rzędu  $k$  na  $\mathbb{R}^n$ , 0-formy i 1-formy, ogólne przedstawienie  $k$ -formy za pomocą bazy dualnej  $dx_1(p), \dots, dx_n(p)$ .
21. Definicja różniczkowania zewnętrznego i jego własności (Twierdzenie 39) wraz z dowodem.
22. Formy zamknięte i dokładne oraz związek pomiędzy nimi. Lemat Poincaré (Twierdzenie 40) wraz z ideą dowodu.
23. Definicja  $n$ -komórki,  $n$ -łańcucha i brzegu łańcucha. Własności brzegu łańcucha (Twierdzenie 41) wraz z dowodem.
24. Odwzorowania  $f_*$  i  $f^*$ , własności  $f^*$  (twierdzenia 42 i 43).
25. Konstrukcja całki z  $k$ -formy na  $k$ -łańcuchu, znaczenie szczególnego przypadku, gdy  $k = 1$ .
26. Twierdzenie Stokesa na łańcuchach (Twierdzenie 44) wraz z dowodem.