Egzamin z analizy matematycznej I. Zestaw A. 5 II 2024.

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Zadanie 1. Znajdź najmniejszą liczbę naturalną n_0 spełniającą warunek z definicji granicy ciągu

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \;\; \forall n > n_0 \;\; |a_n - g| < \varepsilon,$$

gdzie $a_n = \frac{2n+10}{3n+2}$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ i $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Zadanie 2. Zbadaj zbieżność ciągu (a_n) zdefiniowanego rekurencyjnie jako

$$a_{n+1} = 5 - \frac{6}{a_n}, \qquad \text{gdzie} \quad a_0 > 2 \quad \text{jest dane.}$$

Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, to policz jego granicę.

Zadanie 3. Oblicz korzystając z definicji pochodną funkcji f w punkcie $x_0 = 0$ bez używania reguły de l'Hospitala, jeśli

$$f(x) = 3x^3 + 2x|x| - x + 3.$$

Zadanie 4. Wykaż, że funkcja $f(x) = \sin(2\cos(x) + 3)$ jest funkcją lipschitzowską ze stałą 2, tzn spełnia nierówność $|f(x) - f(y)| \leqslant 2|x - y|$ dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadanie 5. Wyznacz wartość najmniejszą i największą funkcji

$$f(x) = x \cdot e^{-x/2} \quad \text{dla} \quad x \in [-1, 5].$$

Zadanie 6. Oblicz granicę funkcji

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\operatorname{tg} x - x}.$$

Egzamin z analizy matematycznej I. Zestaw B. 5 II 2024.

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Zadanie 1. Znajdź najmniejszą liczbę naturalną n_0 spełniającą warunek z definicji granicy ciągu

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad |a_n - g| < \varepsilon,$$

gdzie $a_n = \frac{3n+4}{4n+1}$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ i $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Zadanie 2. Zbadaj zbieżność ciągu (c_n) zdefiniowanego rekurencyjnie jako

$$c_{n+1} = 5 - \frac{6}{c_n}, \qquad \text{gdzie} \quad c_0 > 2 \quad \text{jest dane.}$$

Jeżeli ciąg (c_n) jest zbieżny, to policz jego granicę.

Zadanie 3. Oblicz korzystając z definicji pochodną funkcji f w punkcie $x_0 = 0$ bez używania reguły de l'Hospitala, jeśli

$$f(x) = 2x^4 - x|x| + 2x + 1.$$

Zadanie 4. Wykaż, że funkcja $f(x) = \cos(2\sin(x) - 5)$ jest funkcją lipschitzowską ze stałą 2, tzn spełnia nierówność $|f(x) - f(y)| \leqslant 2|x - y|$ dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadanie 5. Wyznacz wartość najmniejszą i największą funkcji

$$f(x) = -x \cdot e^{x/2} \quad \text{dla} \quad x \in [-5, 1].$$

Zadanie 6. Oblicz granicę funkcji

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \sin x}.$$