

## Analiza matematyczna I. Zakres na egzamin ustny — całość

1. Aksjomaty ciała przemienne i aksjomaty porządku.
2. **Ograniczenie górne i kres górny zbioru**, przykłady. Aksjomat ciągłości.
3. **Zasada indukcji matematycznej** (Twierdzenie 2), przykłady.
4. Nierówność Bernoulliego (Stwierdzenie 2) wraz z dowodem.
5. Średnia arytmetyczna, geometryczna i harmoniczna oraz relacje pomiędzy nimi.
6. Liczby zespolone, wartość bezwzględna i sprzężenie liczby zespolonej.
7. **Definicja ciągu i granicy ciągu, ciągi zbieżne i rozbieżne**, przykłady.
8. Ciągi ograniczone a ciągi zbieżne, arytmetyczne własności granicy (Twierdzenie 6), przykłady.
9. Twierdzenie o trzech ciągach (Twierdzenie 7) wraz z dowodem, przykłady.
10. Umiejętność zbadania z definicji lub z twierdzenia o trzech ciągach granic następujących ciągów:  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $b_n = \sqrt[n]{n}$ ,  $c_n = (-1)^n$ ,  $d_n = \sqrt[n]{x}$  dla  $x > 0$ ,  $e_n = q^n$  dla  $q \in (-1, 1)$ .
11. Ciągi monotoniczne i ściśle monotoniczne, umiejętność wykazania, że ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny (Twierdzenie 8 wraz z dowodem).
12. Wykazanie, że ciąg  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  posiada granicę, liczba Eulera  $e$ .
13. Definicja podciągów, twierdzenie Bolzano-Weierstrassa (Twierdzenie 10), przykłady.
14. Warunek Cauchy'ego (Twierdzenie 11) wraz z dowodem.
15. **Definicja szeregu liczbowego, sum częściowych i szeregu zbieżnego**, przykłady.
16. Warunek Cauchy'ego dla szeregów (Stwierdzenie 15) wraz z dowodem i warunek konieczny zbieżności szeregu (Stwierdzenie 18) wraz z dowodem.
17. Kryteria porównawcze zbieżności szeregów (Stwierdzenia 20–22) wraz z przykładami stosowania.
18. **Kryterium d'Alemberta i kryterium Cauchy'ego** wraz z dowodami, przykłady stosowania.
19. Kryterium zagęszczeniowe (Stwierdzenie 23) wraz z przykładami stosowania.
20. **Szeregi bezwzględnie i warunkowo zbieżne**, wykazanie, że szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny (Stwierdzenie 26 wraz z dowodem).
21. Zachowanie szeregów bezwzględnie zbieżnych i warunkowo zbieżnych przy zmianie kolejności sumowania (Twierdzenie 12 i 13).
22. Twierdzenie Abela (Twierdzenie 14) i wynikające z niego kryteria Dirichleta i Leibniza (wraz z dowodami tych kryteriów), przykłady.
23. Iloczyn Cauchy'ego szeregów, twierdzenie Martensa (Twierdzenie 15).
24. **Definicja funkcji wykładniczej  $\exp(z)$  zmiennej zespolonej i jej własności** (Twierdzenie 17)
25. Iloczyny nieskończone — definicja, zbieżność, warunek konieczny zbieżności, związek ze zbieżnością odpowiednich szeregów (Stwierdzenie 31).
26. Definicja funkcji wykładniczej  $\exp(x)$  zmiennej rzeczywistej i jej własności (Stwierdzenie 32).
27. **Definicja logarytmu naturalnego  $\ln y$  i jego własności** (Twierdzenie 19).
28. Definicja potęgi  $a^x$  dla wszystkich  $a > 0$  i wszystkich  $x \in \mathbb{R}$  i jej własności (Stwierdzenie 34) oraz definicja logarytmu przy dowolnej podstawie.
29. **Definicje funkcji trygonometrycznych sinus i cosinus (wzory Eulera) oraz ich własności** (Twierdzenie 20).

30. Definicja okresu funkcji, okresowość funkcji  $\exp$  na  $\mathbb{C}$  (Twierdzenie 23) i funkcji trygonometrycznych (Stwierdzenie 37).
31. **Definicja punktu skupienia i definicja Heinego granicy funkcji**, arytmetyczne własności granicy funkcji (Twierdzenie 24), przykłady.
32. Definicja granic jednostronnych wraz z przykładami i definicja Cauchy'ego granicy funkcji.
33. Równoważność definicji Heinego i Cauchy'ego granicy funkcji (Twierdzenie 25) i twierdzenie o trzech funkcjach (Twierdzenie 26).
34. Definicja kresów funkcji oraz funkcji monotonicznych i ściśle monotonicznych, przykłady.
35. **Definicja ciągłości funkcji w punkcie i ciągłości funkcji**, przykłady, warunek równoważny ciągłości funkcji w punkcie (Stwierdzenie 41) wraz z dowodem.
36. Twierdzenie Weierstrassa o przyjmowaniu kresów (Twierdzenie 29) wraz z dowodem.
37. Własność Darboux (Twierdzenie 30) wraz z przykładem zastosowania.
38. Jednostajna ciągłość funkcji: definicja, przykłady, warunek równoważny jednostajnej ciągłości (Stwierdzenie 43), jednostajna ciągłość funkcji spełniających warunek Lipschitza (Stwierdzenie 44) wraz z dowodem, twierdzenie Cantora o jednostajnej ciągłości.
39. Zbiory zwarte: definicja, przykłady, wersja ogólna twierdzenia Weierstrassa o przyjmowaniu kresów i twierdzenia Cantora o jednostajnej ciągłości.
40. Funkcje wypukłe: definicja, interpretacja geometryczna, kryterium wypukłości funkcji ciągłych.
41. **Definicja funkcji różniczkowalnej i pochodnej funkcji**, przykłady, interpretacja geometryczna pochodnej.
42. **Wzory na pochodne sumy, iloczynu i ilorazu funkcji** wraz z dowodami.
43. **Twierdzenia o pochodnej złożenia funkcji (Twierdzenie 39) i o pochodnej funkcji odwrotnej (Twierdzenie 40)**.
44. **Wzory na pochodne funkcji elementarnych:**  $\exp(x)$ ,  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\operatorname{tg}(x)$ ,  $\ln(y)$ ,  $a^x$ ,  $x^\alpha$ ,  $\operatorname{arc\,sin}(y)$ ,  $\operatorname{arc\,cos}(y)$ ,  $\operatorname{arc\,tg}(y)$ .
45. Definicja ekstremum lokalnego i lemat Fermata (Twierdzenie 41) wraz z dowodem.
46. **Twierdzenia: Rolle'a (Twierdzenie 42), Cauchy'ego (Twierdzenie 43) i Lagrange'a (Twierdzenie 44)**. Wnioski wynikające z twierdzenia Lagrange'a.
47. Wzór Taylora dla wielomianów (Stwierdzenie 61), wzór Maclaurina z resztą w postaci Peano (Twierdzenie 47) i wzór Taylora z resztą w postaci Peano. **Wzór Taylora z resztą Lagrange'a (Twierdzenie 49)**.
48. Warunek wystarczający istnienia ekstremum (Twierdzenie 50) i warunek wystarczający wypukłości (Twierdzenie 52 i wniosek z niego wynikający).
49. Punkty przegięcia: definicja, interpretacja geometryczna, warunek wystarczający istnienia punktu przegięcia (Stwierdzenie 63).
50. Reguła de l'Hospitala (Twierdzenia 53–56), przykłady stosowania.