Zad 1 $f_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^4}$ (1)

Dla każdego $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^4} = \operatorname{arctg}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{2x}{x^2+n^4}\right) = \operatorname{arctg} 0 = 0$$

Pokażemy, że również $f_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$

Niech $b_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^4}\right|$

Ponieważ $\left(\operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^4}\right)' = 0 \iff \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{x^2+n^4}\right)^2} \frac{2(x^2+n^4)-4x^2}{(x^2+n^4)^2} = 0$

$\iff 2(x^2+n^4) - 4x^2 = 0 \iff x = \pm n^2$

oraz $\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^4} = 0$, to

Wnioskujemy, że funkcja $x \longmapsto \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^4}$ osiąga maksimum globalne

dla $x = n^2$ i minimum globalne dla $x = -n^2$

Zatem

$$b_n = \left|\operatorname{arctg} \frac{\pm 2n^2}{n^4+n^4}\right| = \left|\operatorname{arctg}\left(\frac{\pm 1}{n^2}\right)\right| = \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2}$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2} = 0,$$

czyli $f_n(x) \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$

Zad 2

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+(-1)^n}{2-(-1)^n}\right)^n 2^n \frac{(x-1)^{3n}}{n^2} \qquad (*)$$

Rozpatrzmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n$, gdzie $a_n = \left(\frac{3+(-1)^n}{2-(-1)^n}\right)^n 2^n \frac{1}{n^2}$, $y=(x-1)^3$

Promień zbieżności tego szeregu R spełnia:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{3+(-1)^n}{2-(-1)^n}\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 8$$

Wobec tego szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n$ jest zbieżny dla $|y|<\frac{1}{8}$.

Przypuśćmy teraz, że $|y|=\frac{1}{8}$. Wówczas

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||y|^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n^2}|y|^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$$

Zatem jest zbieżny dla $|y|\leq\frac{1}{8}$, czyli dla x takich, że

$$|x-1|^3 \leq \frac{1}{8} \iff |x-1| \leq \frac{1}{2} \iff x\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$$

Szereg $(*)$ jest zbieżny dla $x\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ i rozbieżny dla $x\in\mathbb{R}\setminus\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

Zad 3

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{-x^2-4x+5}} = \int \frac{x+3}{\sqrt{-(x+2)^2+9}}\,dx = \int \frac{x+2}{\sqrt{-(x+2)^2+9}}\,dx$$

$$+ \int \frac{dx}{\sqrt{-(x+2)^2+9}} = -\sqrt{-(x+2)^2+9} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{-\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}} = \begin{cases} y = \frac{x+2}{3} \\ dy = \frac{dx}{3} \end{cases}$$

$$= -\sqrt{-(x+2)^2+9} + \int \frac{dy}{\sqrt{-y^2+1}} = -\sqrt{-(x+2)^2+9} + \arcsin\frac{x+2}{3} + C$$

Zad 4

Ponieważ $\cos\varphi$ jest okresowy o okresie 2π, to również funkcja $\frac{1}{4+3\cos\varphi}$ jest okresowa o okresie 2π. Zatem

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{4+3\cos\varphi}\,d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4+3\cos\varphi}\,d\varphi =$$

Zauważmy, że dla $\varphi \in (-\pi, \pi)$ możemy zastosować podstawienie $u = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, bo na tym przedziale funkcja $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ jest ciągła i ściśle rosnąca

$$= \begin{cases} u = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} & u(\pi) = +\infty \\ \cos\varphi = \frac{1-u^2}{1+u^2} & u(-\pi) = -\infty \\ d\varphi = \frac{2}{1+u^2}\,du \end{cases} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4+3\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{7+u^2}\,du =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{7\left(1+\left(\frac{u}{\sqrt{7}}\right)^2\right)}\,du = \begin{cases} t = \frac{u}{\sqrt{7}} \\ dt = \frac{du}{\sqrt{7}} \\ t(-\infty) = -\infty \\ t(+\infty) = +\infty \end{cases} = \frac{2}{\sqrt{7}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} t \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2\pi}{\sqrt{7}}$$

Zad 5

Zauważmy, że funkcja podcałkowa $\frac{x\sin x(1+\cos x)}{x^2-4}$ jest nieciągła dla $x=\pm 2$. Zatem wystarczy rozważyć dwa przypadki 1° $a>2$, 2° $a=2$

1° $a>2$ Wystarczy zbadać zbieżność całki w nieskończoności.

W tym celu skorzystamy z kryterium Abela-Dirichleta (Tw 29) dla $f(x)=\sin x(1+\cos x)$ i $g(x)=\frac{x}{x^2-4}$

Dla dowolnych b,c takich, że $a\leq b<c<\infty$ mamy

$$\left|\int_b^c \sin x(1+\cos x)\,dx\right| = \left\{\begin{array}{l} t=\cos x \\ dt=-\sin x\,dx \end{array}\right\} = \left|-\int_{\cos b}^{\cos c} 1+t\,dt\right| =$$

$t(b)=\cos b$
$t(c)=\cos c$

$$= \left|-\left(t+\frac{t^2}{2}\right)\Big|_{\cos b}^{\cos c}\right| = \left|-\cos c-\frac{\cos^2 c}{2}+\cos b+\frac{\cos^2 b}{2}\right| \leq 3,$$

oraz

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-4} = 0 \quad ; \quad g'(x) = \frac{x^2-4-x(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{-4-x^2}{(x^2-4)^2} < 0 \quad \forall_x$$

czyli $g(x)$ jest malejąca. Zatem z kryterium Abela-Dirichleta całka jest zbieżna

2° $a=2$. Wiemy, że w ∞ całka jest zbieżna. Wystarczy sprawdzić zachowanie w otoczeniu 2. Zauważmy, że dla dostatecznie małego $\varepsilon>0$ mamy $|x\sin x(1+\cos x)| \geq \frac{1}{2}|2\sin 2(1+\cos 2)|$ dla $x\in[2,2+\varepsilon]$

i $x\sin x(1+\cos x)$ ma stały znak

wtedy

$$\left|\int_2^{2+\varepsilon}\frac{x\sin x(1+\cos x)}{x^2-4}\right| \geq \frac{1}{2}|2\sin 2(1+\cos 2)|\cdot\int_2^{2+\varepsilon}\frac{dx}{x^2-4} = \infty, \text{ bo}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\left[\int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x+2}\right] = \frac{1}{4}\left[\ln|x-2| - \ln|x+2|\right]$$

Wobec tego

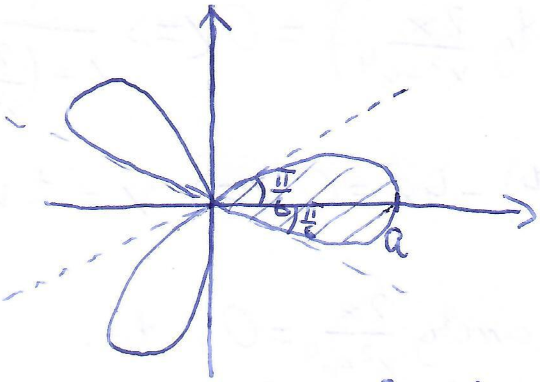
$$\int_2^{2+\varepsilon} \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\left[\ln\varepsilon - \ln(4+\varepsilon)\right] - \frac{1}{4}\left[(-\infty) - \ln 4\right] = \infty.$$

czyli dla $a=2$ całka jest rozbieżna.

Zad 6

I sposób

Zauważmy, że rozeta osiągnie punkt $(a,0)$ dla $\varphi=0$, a potem dla $\varphi=\pi$



Zatem pole wynosi

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi}\cos^2 3\varphi\,d\varphi = \left\{\begin{array}{l} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \\ \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + 1) \\ \cos^2 3\varphi = \frac{1}{2}(\cos 6\varphi + 1) \end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}a^2\int_0^{\pi}\cos 6\varphi + 1\,d\varphi = \frac{1}{4}a^2\left[\frac{\sin 6\varphi}{6} + \varphi\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{4}a^2\left[\frac{\sin 6\pi}{6} + \pi - \frac{\sin 0}{6} - 0\right] = \frac{1}{4}a^2\pi.$$

II sposób Można też zauważyć, że pole będzie równe $3\times$ pole zakreskowane

Aby obliczyć pole zakreskowane wystarczy zauważyć, że rozeta osiągnie punkt $(0,0)$ dla $\varphi=\frac{\pi}{6}$ i $\varphi=-\frac{\pi}{6}$. Zatem całe pole wynosi

$$3\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} r^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{3}{4}a^2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\varphi\,d\varphi = \frac{3}{4}a^2\left[\frac{\sin 6\varphi}{6} + \varphi\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{4}a^2\left[\frac{\sin\pi}{6} + \frac{\pi}{6} - \frac{\sin(-\pi)}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \frac{3}{4}a^2\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}a^2\pi.$$