Analiza matematyczna II. Zakres podstawowy na egzamin ustny (całość)

1. Zbieżność punktowa i jednostajna ciągów funkcyjnych: definicje, przykłady, porównanie, podstawowe własności.

2. Twierdzenie o zbieżności jednostajnej ciągu funkcji ciągłych (Twierdzenie 1) wraz z dowodem.

3. Charakteryzacja zbieżności jednostajnej ciągu funkcji za pomocą jednostajnego warunku Cauchy'ego (Twierdzenie 2) wraz z dowodem.

4. Zbieżność punktowa i jednostajna szeregów funkcyjnych: definicje, przykłady, własności.

5. Kryterium Weierstrassa zbieżności jednostajnej i bezwzględnej szeregów funkcyjnych (Twierdzenie 3) wraz z dowodem.

6. Co to są wielomiany Bernsteina i jak się je wykorzystuje do dowodu Twierdzenia Weierstrassa o jednostajnym przybliżaniu funkcji ciągłych wielomianami (Twierdzenie 4 i 5).

7. Co mówi twierdzenie o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych (Twierdzenie 6) i szeregów funkcyjnych wraz z przykładami zastosowania.

8. Definicja i przykłady szeregów potęgowych, wzór Cauchy'ego-Hadamarda (Twierdzenie 8).

9. Twierdzenie o różniczkowaniu szeregów potęgowych (Twierdzenie 9) wraz z dowodem i wnioski z niego wypływające.

10. Funkcja pierwotna: definicja, przykłady, zależności pomiędzy dwoma funkcjami pierwotnymi tej samej funkcji na tym samym przedziale (Stwierdzenie 6) wraz z dowodem.

11. Całka nieoznaczona: definicja, przykłady, podstawowe całki nieoznaczone.

12. Własności całek nieoznaczonych: liniowość, całkowanie przez części i przez podstawienie (Stwierdzenia 7–9 wraz z dowodami).

13. Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste (Twierdzenie 12) i całkowanie funkcji wymiernych.

14. Funkcje hiperboliczne i funkcje area: definicje, podstawowe własności, zastosowanie do liczenia całek z funkcji niewymiernych.

15. Całka oznaczona (całka Newtona): definicja (wraz z uzasadnieniem jej poprawności), przykłady.

16. Podstawowe własności całek oznaczonych: liniowość, wzór na całkowanie przez części i przez podstawienie, podział przedziału całkowania (Stwierdzenia 10–13).

17. Monotoniczność całki (Stwierdzenie 14) wraz z dowodem.

18. Wzór Wallisa (Twierdzenie 15) i Stirlinga (Twierdzenie 16) wraz z przykładami stosowania.

19. Twierdzenia o wartości średniej dla całek (Twierdzenie 18 i 19) wraz z przykładami stosowania.

20. Konstrukcja całki Riemanna (definicje podziału przedziału, sum górnych i dolnych Riemanna, całek górnych i dolnych Riemanna, funkcji całkowalnych w sensie Riemanna i całki Riemanna).

21. Charakteryzacja funkcji całkowalnych w sensie Riemanna (Twierdzenie 20) i klasy funkcji, które są całkowalne w sensie Riemanna (Twierdzenia 21–23).

22. Długość krzywej: definicje łamanej wpisanej w krzywą, długości łamanej, długości krzywej i wzór na długość krzywej (Twierdzenie 24), przykłady.

23. Bryły obrotowe: wzory na objętość i pole powierzchni bocznej bryły obrotowej wraz z ich konstrukcją, przykłady.

24. Definicja całki niewłaściwej na przedziale nieskończonym, przykłady, warunek Cauchy'ego dla całek niewłaściwych (Twierdzenie 25).

25. Definicja zbieżności bezwzględnej i warunkowej dla całek niewłaściwych, kryteria zbieżności dla całek niewłaściwych (Twierdzenia 28 i 29), przykłady.

26. Kryterium całkowe zbieżności szeregów (Twierdzenie 27) wraz ze szkicem dowodu, przykłady zastosowania.

27. Definicja całki niewłaściwej na przedziale skończonym, przykłady, warunek Cauchy'ego (Twierdzenie 30).

28. Definicja funkcji gamma Eulera, wykazanie zbieżności całki definiującej funkcję gamma, podstawowe własności funkcji gamma (Stwierdzenie 21) wraz z dowodem.

29. Definicja logarytmicznej wypukłości, wykazanie, że funkcja gamma jest logarytmicznie wypukła, twierdzenie Bohra (Twierdzenie 33) o funkcji gamma.

30. Różne wzory wyrażające funkcję gamma: wzór Gaussa, wzór iloczynowy Weierstrassa (Twierdzenie 35), wzór Legendre'a (Twierdzenie 36), wzór z sinusem (Twierdzenie 38).

31. Funkcja beta Eulera: definicja i wykazanie jej poprawności, podstawowe własności (Stwierdzenie 26), związek z funkcją gamma (Twierdzenie 34 punkt 3)

32. Liczby Bernoulliego (definicja, wzór rekurencyjny na ich wyliczanie), funkcja dzeta Riemanna, wyrażenie wartości funkcji dzeta Riemanna w punktach parzystych za pomocą liczb Bernoulliego (wzór Eulera).

33. Jak wyglądają rzeczywisty i zespolony szereg Fouriera funkcji f. Jak znaleźć współczynniki Fouriera tych szeregów.

34. Co mówią: lemat Riemanna-Lebesgue'a (Twierdzenie 41) i kryterium Diniego (Twierdzenie 42). Dla jakich funkcji można stosować kryterium Diniego.

35. Jak wygląda „iloczyn skalarny” $< f, g >_{L^2}$ i „norma” $\|f\|_{L^2}$ w L^2. Funkcje $e_n(x)$ dla $n \in \mathbb{Z}$, ich własności i związek ze współczynnikami $\hat{f}(n)$. Co mówią Twierdzenie 43 i Twierdzenie 45.

Analiza matematyczna II. Zakres dodatkowy na egzamin ustny — na ocenę powyżej dobrej.

1*. Wyjaśnij pojęcia związane z Twierdzeniem Arzeli-Ascoli (Twierdzenie 7) i przedstaw ideę dowodu.

2*. Twierdzenie Abela o ciągłości na krańcu przedziału zbieżności (Twierdzenie 10) wraz z dowodem i przykładem zastosowania.

3*. Twierdzenie mówiące, że każda funkcja ciągła ma funkcję pierwotną (Twierdzenie 11) wraz z dowodem.

4*. Twierdzenie o przejściu granicznym pod znakiem całki (Twierdzenie 13) wraz z dowodem (wystarczy wybrać jeden dowód).

5*. Twierdzenie o przybliżaniu całki sumami całkowymi (Twierdzenie 14) wraz z dowodem.

6*. Warunek Cauchy'ego dla całek niewłaściwych (Twierdzenie 25) wraz z dowodem.

7*. Nierówność Younga (Stwierdzenie 23) i nierówność Höldera (Twierdzenie 32) wraz z dowodem.

8*. Rozwinięcie cotangensa w szereg ułamków prostych (Twierdzenie 39) wraz z dowodem.