Egzamin z analizy matematycznej III. Zestaw A. 2 II 2024.

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Zadanie 1. Niech $f = f(u, v)$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną. Znaleźć pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji
$$g(x, y) = f(xe^y, y \sin y).$$

Zadanie 2. Pokazać, że odwzorowanie
$$\phi(t) = (\cos t, t^3 - 1, \sin t)$$
jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}$ na obraz $\phi(\mathbb{R})$. Znaleźć przestrzeń styczną do $\phi(\mathbb{R})$ w punkcie $(1, -1, 0)$.

Zadanie 3. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji
$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy + 15 \quad \text{na} \quad \mathbb{R}^2.$$

Zadanie 4. Napisać wzór Taylora względem punktu $(1, -1)$ dla funkcji
$$f(x, y) = xy + x^2 + 2y^2 - x - y + 1.$$

Zadanie 5. Obliczyć całkę
$$\iint_D x + y + 1 \, dx \, dy,$$
gdzie obszar D jest ograniczony wszystkimi 4 krzywymi: $y = x^2$, $y = 4x^2$, $y = x$ i $y = 2x$.

Zadanie 6. Dokonując zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe oblicz całkę podwójną
$$\iint_D (x^2 + y^2 + 2xy + x + 1) \, dx \, dy,$$
gdzie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 < x^2 + y^2 < 4, \ x > 0, \ y > x\}$.

Zadanie 7. Obliczyć całkę krzywoliniową zorientowaną w $\mathbb{R}^3$
$$\int_\gamma (x + y + z) \, dx + (x^2 - y^2) \, dy + (x - z) \, dz,$$
gdzie γ — odcinek o początku $(-1, 2, 0)$ i końcu $(2, 3, 3)$.

Zadanie 8. Oblicz całkę powierzchniową niezorientowaną
$$\iint_\Sigma -\sqrt{x^2 + y^2} \, dS,$$
gdzie $\Sigma = \{(x, y, z) = (r \cos t, r \sin t, t) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < r < 1, \ 0 < t < 4\pi\}$ jest powierzchnią śrubową.

Egzamin z analizy matematycznej III. Zestaw B. 2 II 2024.

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Zadanie 1. Niech $g = g(s,t)$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną. Znaleźć pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji
$$f(x,y) = g(\cos x, ye^{xy}).$$
Zadanie 2. Pokazać, że odwzorowanie
$$\phi(t) = (t^5 + 1, \sin t, \cos t)$$
jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}$ na obraz $\phi(\mathbb{R})$. Znaleźć przestrzeń styczną do $\phi(\mathbb{R})$ w punkcie $(1,0,1)$.

Zadanie 3. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji
$$f(x,y) = -x^4 - y^4 - 4xy + 5 \quad \text{na} \quad \mathbb{R}^2.$$

Zadanie 4. Napisać wzór Taylora względem punktu $(-1,1)$ dla funkcji
$$f(x,y) = 2xy - x^2 - 2y^2 + x + 2y + 1.$$

Zadanie 5. Obliczyć całkę
$$\iint_D x - y - 1 \, dx\, dy,$$
gdzie obszar D jest ograniczony wszystkimi 4 krzywymi: $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = x$ i $y = 4x$.

Zadanie 6. Dokonując zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe oblicz całkę podwójną
$$\iint_D (x^2 + y^2 - 2xy + 1)\, dx\, dy,$$
gdzie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 4 < x^2 + y^2 < 9,\ x < 0,\ y > x\}$.

Zadanie 7. Obliczyć całkę krzywoliniową zorientowaną w $\mathbb{R}^3$
$$\int_\gamma (x - y + 2z)\, dx + (x^2 + y^2)\, dy + (x + z)\, dz,$$
gdzie γ — odcinek o początku $(-1,0,1)$ i końcu $(1,2,2)$.

Zadanie 8. Oblicz całkę powierzchniową niezorientowaną
$$\iint_\Sigma 2\sqrt{x^2 + y^2}\, dS,$$
gdzie $\Sigma = \{(x,y,z) = (r\cos t, r\sin t, t) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < r < 2,\ 0 < t < 2\pi\}$ jest powierzchnią śrubową.