Egzamin z analizy wektorowej. Zestaw A. 6 II 2017.

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Zadanie 1. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Zadanie 2. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej równaniem

$$(x-y)^2 = y + xy - 3x.$$

Zadanie 3. Obliczyć drugie pochodne cząstkowe funkcji

$$u(x,y) = f(ye^y, \sin(2x-y)), \qquad \text{gdzie } f \text{ jest funkcją klasy } C^2.$$

Zadanie 4. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $f(x,y) = \sin(x+2y)$.

Zadanie 5. Obliczyć całkę

$$\iint_D xy + x^3 \, dx \, dy,$$

gdzie pole obszaru D jest ograniczone krzywymi $y = x^2$, $y = 4x$ i $y = x$.

Zadanie 6. Korzystając z zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe r i φ obliczyć

$$\iint_D (x^2+y^2)^4 + x \, dx \, dy,$$

gdzie obszar D jest ograniczony krzywymi $x^2+y^2 = 9$, $x^2+y^2 = 16$, $y = 0$, $y = -x$ $(y \geqslant 0)$.

Zadanie 7. Obliczyć całkę krzywoliniową niezorientowaną

$$\int_\gamma (2xy + y^2) \, dl,$$

gdzie γ — łamana łącząca punkty $(0,1)$, $(1,0)$ i $(5,0)$.

Zadanie 8. Sprawdzić, czy podana całka krzywoliniowa zorientowana

$\displaystyle\int_{\gamma_{AB}} (2xy^2 + \sin 2x) \, dx + (2x^2 y + e^{4y}) \, dy$, gdzie γ_{AB} — krzywa o początku $A = (1,0)$ i końcu $B = (3,5)$

nie zależy od kształtu krzywej całkowania i jeśli tak to ją obliczyć.

Egzamin z analizy wektorowej. Zestaw B. 6 II 2017.

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Zadanie 1. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Zadanie 2. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej równaniem

$$(x+y)^2 = -y - xy - 3x.$$

Zadanie 3. Obliczyć drugie pochodne cząstkowe funkcji

$$u(x,y) = f(\sin(x+2y), \cos y), \qquad \text{gdzie } f \text{ jest funkcją klasy } C^2.$$

Zadanie 4. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $f(x,y) = \cos(2x+y)$.

Zadanie 5. Obliczyć całkę

$$\iint\limits_D x^2 y - 3x \, dx \, dy,$$

gdzie pole obszaru D jest ograniczone krzywymi $y = x^2$, $y = 4x^2$ i $y = 4$ $(x \geqslant 0)$.

Zadanie 6. Korzystając z zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe r i φ obliczyć

$$\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2} + y \, dx \, dy,$$

gdzie obszar D jest ograniczony krzywymi $x^2+y^2 = 4$, $x^2+y^2 = 9$, $x = 0$, $y = x$ $(y \geqslant 0)$.

Zadanie 7. Obliczyć całkę krzywoliniową niezorientowaną

$$\int\limits_\gamma (x+y)^2 + y \, dl,$$

gdzie γ — łamana łącząca punkty $(1,0)$, $(0,-1)$ i $(0,3)$.

Zadanie 8. Sprawdzić, czy podana całka krzywoliniowa zorientowana

$$\int\limits_{\gamma_{AB}} (2xy^3 + \sin x)\, dx + (3x^2y^2 + e^y)\, dy, \text{ gdzie } \gamma_{AB} \text{ — krzywa o początku } A = (-1,3) \text{ i końcu } B = (2,1)$$

nie zależy od kształtu krzywej całkowania i jeśli tak to ją obliczyć.