WYKŁADY Z ANALIZY WEKTOROWEJ

SŁAWOMIR MICHALIK (WMP UKSW)

LITERATURA:

1. A. B i r k h o l c, *Analiza matematyczna. Funkcje wielu zmiennych*, PWN, Warszawa 2012.
2. W. R u d i n, *Podstawy analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 2012.
3. M. S p i v a k, *Analiza na rozmaitościach*, PWN, Warszawa 2005.
4. K. M a u r i n, *Analiza. Część I*, PWN, Warszawa 2010.
5. W. K o ł o d z i e j, *Analiza matematyczna*, PWN, Warszawa 2009.
6. R. R u d n i c k i, *Wykłady z analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 2002.

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

1. WYKŁAD. PRZESTRZEŃ EUKLIDESOWA, NIERÓWNOŚĆ SCHWARZA, GRANICA I CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH.

1.1. **Przestrzenie euklidesowe.** Dla każdej liczby naturalnej n oznaczmy przez $\mathbb{R}^n$ zbiór wszystkich uporządkowanych ciągów składających się z n liczb rzeczywistych $x = (x_1, ..., x_n)$.

Liczby $x_1, ...x_n$ nazywamy *wpółrzędnymi* elementu x.

Elementy zbioru $\mathbb{R}^n$ nazywamy *wektorami* (lub *punktami*).

Dla $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ określamy działania:

$$x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$\alpha \cdot x = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Zbiór $\mathbb{R}^n$ z takimi działaniami nazywamy *przestrzenią wektorową nad ciałem* $\mathbb{R}$.

Elementem zerowym przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy punkt $0 = (0, 0, ..., 0)$.

W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ wprowadźmy *iloczyn skalarny* wektorów $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$x \cdot y = \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

oraz odwzorowanie $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}_+$ zdefiniowane jako

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Twierdzenie 1 (Nierówność Schwarza)**.** *Jeżeli* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *to* $|x \cdot y| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ *(lub inaczej* $(\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2 \leqslant (\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2)$*).*

Dowód: Dla dowolnego $t \in \mathbb{R}^n$ zachodzi nierówność: $\sum_{i=1}^n (x_i t - y_i)^2 \geqslant 0$. Zatem trójmian kwadratowy

$$f(t) = (\sum_{i=1}^n x_i^2)t^2 - 2(\sum_{i=1}^n x_i y_i)t + (\sum_{i=1}^n y_i^2)$$

jest nieujemny i $\Delta \leqslant 0$. Oznacza to, że $\Delta = 4(\sum_{i=1}^n x_i y_i) - 4(\sum_{i=1}^n x_i^2) \leqslant 0$. Stąd wynika nierówność Schwarza. $\square$

Wniosek 1. *Odwzorowanie* $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *zdefiniowane wzorem* $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ *jest* normą *w* $\mathbb{R}^n$, *czyli dla każdego* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *i* $\alpha \in \mathbb{R}$ *spełnia warunki:*

(1) $\|x\| \geqslant 0$ *i* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(2) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$,
(3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

Dowód: Wystarczy wykazać, że zachodzą warunki (1)–(3):

(1) $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \geqslant 0$. Ponadto $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0$ dla $i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow x = 0$.

(2) $\|x + y\|^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y \overset{\text{Twierdzenie 1}}{\leqslant} \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$.

(3) $\|\alpha x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i)^2} = \sqrt{\alpha^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2} = |\alpha| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = |\alpha| \cdot \|x\|$.

□

Definicja 1. Przestrzeń wektorową $\mathbb{R}^n$ z iloczynem skalarnym $x \cdot y$ i normą $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ nazywamy *n-wymiarową przestrzenią euklidesową*, a $\|\cdot\|$ nazywamy *normą euklidesową*.

Uwaga 1. Norma euklidesowa $\|\cdot\|$, jak każda norma, zadaje metrykę $d(x, y) := \|x - y\|$, czyli funkcję $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}_+$ spełniającą warunki:

(1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(2) $d(x, y) = d(y, x)$,
(3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

Zatem przestrzeń euklidesowa jest przestrzenią metryczną.

1.2. **Granica i ciągłość.**

Definicja 2. *Kulą otwartą* o promieniu r i środku x w $\mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\},$$

a *kulą domkniętą* zbiór

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leqslant r\}.$$

Mówimy, że zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest *ograniczony*, jeśli istnieje $R > 0$ t.że $A \subseteq B(0, R)$, w przeciwnym wypadku zbiór A nazywamy *nieograniczonym*.

Mówimy, że zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest *otwarty*, jeśli dla każdego $x \in A$ istnieje $r > 0$ takie, że $B(x, r) \subseteq A$.

Mówimy, że zbiór $B \subseteq \mathbb{R}^n$ jest *domknięty*, jeśli $\mathbb{R}^n \setminus B$ jest otwarty.

Niech $E \subset \mathbb{R}^n$. *Wnętrzem* E (oznaczenie: $\operatorname{Int} E$) nazywamy największy zbiór otwarty zawarty w E. *Domknięciem* E (oznaczenie: $\overline{E}$) nazywamy najmniejszy zbiór domknięty zawierający E. *Brzegiem* E (oznaczenie: ∂E) nazywamy zbiór $\overline{E} \setminus \operatorname{Int} E$.

Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ nazywamy *punktem skupienia* zbioru $E \subseteq \mathbb{R}^n$, jeśli dla każdego $r > 0$ zachodzi warunek $(B(x, r) \setminus \{x\}) \cap E \neq \varnothing$. Punkt $x \in E$ nazywamy *punktem izolowanym* zbioru E, jeśli x nie jest punktem skupienia E.

Uwaga 2. Po zastąpieniu odległości w $\mathbb{R}$ (czyli $|x - y|$) przez odległość w $\mathbb{R}^n$ (czyli $\|x - y\|$) pojęcie granicy przenosi się na $\mathbb{R}^n$. Dokładniej:

Definicja 3. Mówimy, że ciąg (x_k), $x_k \in \mathbb{R}^n$, jest *zbieżny* do $x_0 \in \mathbb{R}^n$, co oznaczamy $\lim_{k \to \infty} x_k = x_0$, jeśli $\lim_{k \to \infty} \|x_k - x_0\| = 0$.

Stwierdzenie 1. *Jeśli* $x_k = (x_{1k}, ..., x_{nk})$ *i* $x_0 = (x_{10}, ..., x_{n0})$*, to*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \lim_{k\to\infty} x_{1k} = x_{10}, ..., \lim_{k\to\infty} x_{nk} = x_{n0}$$

(czyli ciąg x_k *zbiega do* x_0 *wtedy i tylko wtedy, gdy zbiega po wszystkich swoich współrzędnych).*

Dowód: $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \Leftrightarrow \|x_k - x_0\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{ik} - x_{i0})^2} = 0 \Leftrightarrow$ $\lim_{k\to\infty} |x_{ik} - x_{i0}| = 0$ dla $i = 1, ..., n \Leftrightarrow x_{ik} = x_{i0}$ dla $i = 1, ..., n$. □

Przykład 1. Niech $x_k = (\frac{1}{k}, 2 - \frac{1}{k^2}, \sqrt[k]{10})$. Wówczas

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} (\frac{1}{k}, 2 - \frac{1}{k^2}, \sqrt[k]{10}) = \Big(\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}, \lim_{k\to\infty} 2 - \frac{1}{k^2}, \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{10}\Big) = (0, 2, 1).$$

Możemy teraz uogólnić na $\mathbb{R}^n$ pojęcie granicy i ciągłości funkcji.

Uwaga 3. Przekształcenie $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będziemy nazywać *funkcją*, a $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ (to znaczy $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x))$, $f_i\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) *odwzorowaniem.*

Definicja 4 (Granica odwzorowania)**.** Niech $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ odwzorowanie i x_0 punkt skupienia zbioru D. Wówczas mówimy, że f ma *granicę* w x_0 równą $y_0 \in \mathbb{R}^k$, co oznaczamy $y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x)$, jeśli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $x \in D$ zachodzi implikacja

$$x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in B(y_0, \epsilon),$$

czyli równoważnie

$$0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - y_0\| < \epsilon.$$

Definicja 5 (Ciągłość w sensie Cauchy'ego)**.** Mówimy, że odwzorowanie $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ jest *ciągłe w* $x_0 \in D$ jeśli $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D$

$$x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \epsilon)$$

$$(\text{równoważnie: } \|x - x_0\| < \delta) \Rightarrow (\|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon).$$

Mówimy, że odwzorowanie f jest *ciągłe na* D jeśli jest ciągłe w każdym punkcie $x_0 \in D$.

Twierdzenie 2 (Ciągłość w sensie Heinego)**.** *Odwzorowanie* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *jest ciągłe w* $x_0 \in D$ *będącym punktem skupienia zbioru* D *wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego ciągu* (x_k)*,* $x_k \in D$*,* $x_k \neq x_0$ *i* $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ *zachodzi* $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$*.*

Uwaga 4. Odwzorowanie ciągłe po każdej współrzędnej osobno nie musi być ciągłe! W szczególności z faktu, że $x \mapsto f(x, y_0)$ ciągła w x_0 i $y \mapsto f(x_0, y)$ ciągła w y_0 nie musi wynikać, że $(x, y) \mapsto f(x, y)$ ciągła w (x_0, y_0).

Przykład 2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Funkcja f jest ciągła poza $(0, 0)$. W punkcie $(0, 0)$ funkcja f jest ciągła po każdej zmiennej osobno, bo $x \mapsto f(x, 0) \equiv 0$ ciągła w 0 i $y \mapsto f(0, y) \equiv 0$ ciągła w 0. Natomiast f nie jest ciągła jako funkcja (x, y) w $(0, 0)$, bo dla ciągu $(x_k, y_k) = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ zachodzi $\lim_{k\to\infty} (x_k, y_k) = (0, 0)$, zaś $\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \frac{1}{2} \neq f(0, 0)$.