10. WYKŁAD. CAŁKA n-WYMIAROWA I ZBIORY MIARY ZERO

10.1. **Całka n-wymiarowa.** Niech $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^n$ jest przedziałem domkniętym. Skonstruujemy całkę z f – podobnie do konstrukcji całki Riemanna dla funkcji jednej zmiennej.

Definicja 23. *Podziałem P odcinka domkniętego* $[a, b]$ nazywamy ciąg $t_0, \ldots, t_k$, gdzie $a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_k = b$. P dzieli $[a, b]$ na k odcinków $[t_{i-1}, t_i]$.

Podziałem przedziału $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ nazywamy zbiór podziałów $P = (P_1, \ldots, P_n)$, gdzie każdy P_i jest podziałem odcinka $[a_i, b_i]$.

Jeżeli P_i dzieli odcinek $[a_i, b_i]$ na N_i odcinków, to $P = (P_1 \ldots P_n)$ dzieli $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ na $N = N_1 \cdot \ldots \cdot N_n$ przedziałów, które będziemy nazywać *podprzedziałami podziału P*.

Załóżmy, że $A \subset \mathbb{R}^n$ przedział, $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ ograniczone, P – podział A, S – podprzedział podziału A. Niech dalej:

$$m_S(f) = \inf\{f(x)\colon x \in S\}, \qquad M_S(f) = \sup\{f(x)\colon x \in S\}.$$

Definicja 24. *Objętością przedziału* $S = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ (lub $S = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$) nazywamy liczbę $v(S) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$.

Sumę dolną (L) i *górną* (U) funkcji f dla podziału P określamy wzorami:

$$L(f, P) = \sum_S m_S(f) \cdot v(S), \qquad U(f, P) = \sum_S M_S(f) \cdot v(S)$$

Oczywiście $L(f, P) \leqslant U(f, P)$.

Lemat 2. *Niech podział P' rozdrabnia podział P (tzn. że każdy podprzedział w P' jest zawarty w pewnym podprzedziale w P). Wówczas:*

$$L(f, P) \leqslant L(f, P') \quad i \quad U(f, P') \leqslant U(f, P).$$

Dowód: Każdy podprzedział S podziału P jest rozdzielony na kilka podprzedziałów $S_1, \ldots, S_\alpha$ podziału P', więc $v(S) = v(S_1) + \ldots + v(S_\alpha)$. Stąd $m_S(f) \leqslant m_{S_i(f)}$ oraz

$$m_S(f) \cdot v(S) = m_S(f) \cdot v(S_1) + \ldots + m_S(f) \cdot v(S_\alpha) \leqslant m_{S_1}(f) v(S_1) + \ldots + m_{S_\alpha}(f) \cdot v(S_\alpha).$$

Sumując po wszystkich podprzedziałach dostaniemy: $L(f, P) \leqslant L(f, P')$. Dla sum górnych dowód jest podobny. □

Wniosek 4. *Jeżeli P i P' są dwoma dowolnymi podziałami, to $L(f, P) \leqslant U(f, P')$.*

Dowód: Niech P'' podział rozdrabniający zarówno dla P jak i dla P'. Wówczas z lematu:

$$L(f, P) \leqslant L(f, P'') \leqslant U(f, P'') \leqslant U(f, P').$$

□

Z wniosku wynika, że kres górny wszystkich sum dolnych dla f jest mniejszy lub równy od kresu dolnego wszystkich sum górnych dla f.

Definicja 25. Funkcja $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywa się *całkowalną* na przedziale A jeżeli f ograniczona oraz $\sup\limits_P L(f, P) = \inf\limits_P U(f, P)$. Określoną tym równaniem liczbę oznacza się $\int\limits_A f$ i nazywa się *całką z funkcji f na przedziale A*.

Stosowany zapis: $\int\limits_A f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$. Jeżeli $f\colon \overset{a \leqslant b}{[a, b]} \longrightarrow \mathbb{R}$, to $\int\limits_{[a,b]} f = \int\limits_a^b f$.

Twierdzenie 24 (Kryterium całkowalności funkcji)**.** *Funkcja ograniczona $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki podział P przedziału A, że*

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon. \tag{12}$$

Dowód:

$\Leftarrow$ Jeżeli zachodzi (12), to oczywiście $\sup\{L(f,P)\} = \inf\{U(f,P)\}$ i f jest całkowalna.

$\Rightarrow$ Jeżeli f całkowalna, czyli $\sup\{L(f,P)\} = \inf\{U(f,P)\}$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją takie podziały P i P', że $U(f,P) - L(f,P') < \varepsilon$. Niech P'' rozdrabnia zarówno P jak i P'. Wtedy z lematu

$$U(f,P'') - L(f,P'') \leqslant U(f,P) - L(f,P') < \varepsilon.$$

□

Przykład 13. (1) $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ – funkcja stała $f(x) = c$. Wówczas dla dowolnego podziału P i podprzedziału S mamy $m_S(f) = M_S(f) = c$. Zatem $L(f,P) = U(f,P) = \sum\limits_S \cdot v(S) = c \cdot v(A)$. Stąd $\int\limits_A f = c \cdot v(A)$.

(2) Niech $f\colon [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie określona jako

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Niech P — pewien podział i S jego podprzedział. Wówczas S zawiera zarówno (x,y) z $x \in \mathbb{Q}$ jak i z $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Stąd $m_S(f) = 0$ i $M_S(f) = 1$. Wówczas

$$L(f,P) = \sum_S 0 \cdot v(S) = 0 \quad \text{i} \quad U(f,P) = \sum_S 1 \cdot v(S) = v([0,1] \times [0,1]) = 1.$$

Dlatego f nie jest całkowalna.

10.2. **Zbiory miary zero.**

Definicja 26. Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ ma *(n-wymiarową) miarę* 0, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie pokrycie $\{U_1, U_2, U_3, \ldots\}$ zbioru A przedziałami domkniętymi, że $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \varepsilon$.

Uwagi:

(1) Jeżeli A ma miarę zero i $B \subset A$, to B ma też miarę zero.

(2) Zbiór składający się ze skończenie wielu lub przeliczalnie wielu punktów jest miary zero. Rzeczywiście, niech $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ i niech dla ustalonego $\varepsilon > 0$ oznaczmy przez U_i przedział domknięty zawierający a_i taki, że $v(U_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Wówczas $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$.

Twierdzenie 25. *Jeżeli $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ i każde A_i ma miarę zero, to A też ma miarę zero.*

Dowód: Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ A_i ma miarę zero, to istnieje pokrycie $\{U_{i1}, U_{i2}, U_{i3}, \ldots\}$ zbioru A_i takimi przedziałami domkniętymi, że $\sum\limits_{j=1}^{\infty} v(U_{i,j}) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Wówczas rodzina $U_{i,j}$ jest pokryciem A i można ją ustawić w ciąg $V_1, V_2, \ldots$ Zachodzi: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v(V_i) < \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i}$. □