11.1. **Zbiory objętości zero.**

Definicja 27. Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ ma *(n-wymiarową) objętość* 0, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie pokrycie skończone $\{U_1, \ldots, U_n\}$ zbioru A przedziałami domkniętymi, że $\sum\limits_{i=1}^{n} v(U_i) < \varepsilon$.

Uwaga: Jeżeli A ma objętość zero, to A ma miarę zero.

Twierdzenie 26. *Jeżeli $a < b$, to $[a,b] \subset \mathbb{R}$ nie ma objętości zero. Co więcej jeżeli $\{U_1, \ldots, U_n\}$ pokrycie skończone $[a,b]$ przedziałami domkniętymi, to $\sum\limits_{i=1}^{n} v(U_i) \geqslant b - a$.*

Dowód: Załóżmy, że każde $U_i \subset [a,b]$. Niech $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ będą wszystkimi punktami końcowymi wszystkich U_i. Wtedy każda liczba $v(U_i)$ jest sumą pewnych różnic $t_j - t_{j-1}$. Ponadto każde $[t_{j-1}, t_j]$ leży przynajmniej w jednym U_i, więc $\sum\limits_{i=1}^{n} v(U_i) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{k} (t_j - t_{j-1}) = b - a$. □

Jeżeli $a < b$, to $[a,b]$ też nie ma miary 0. Wynika to z poniższego twierdzenia:

Twierdzenie 27. *Jeżeli A jest zwarty i ma miarę zero, to A ma objętość 0.*

Dowód: Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ A ma miarę 0, to istnieje także pokrycie $\{U_1, U_2, \ldots\}$ zbioru A przedziałami otwartymi, że $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \varepsilon$. Ponieważ A jest zwarty, pewna skończona liczba $U_1, \ldots, U_n$ z U_i także pokrywa A i z pewnością $\sum\limits_{i=1}^{n} v(U_i) < \varepsilon$. □

11.2. **Funkcje o wahaniu ograniczonym i charakteryzacja funkcji całkowalnych.**

Definicja 28. *Wahaniem $o(f,a)$ funkcji f w punkcie a* nazywamy granicę $o(f,a) = \lim\limits_{\delta \to 0^+} = [M(a,f,\delta) - m(a,f,\delta)]$, gdzie

$$M(a,f,\delta) = \sup\{f(x)\colon x \in A, |x-a| < \delta\} \quad \text{i} \quad m(a,f,\delta) = \inf\{f(x)\colon x \in A, |x-a| < \delta\}.$$

(Wahanie $o(f,a)$ mierzy na ile funkcja f nie jest ciągła w a).

Uwaga: Funkcja ograniczona f jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy gdy $o(f,a) = 0$.

Lemat 3. *Niech A przedział domknięty i $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ taka funkcja ograniczona, że $o(f,x) < \varepsilon$ dla wszystkich $x \in A$. Wówczas dla A istnieje taki podział P, że $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon \cdot v(A)$.*

Dowód: Dla każdego $x \in A$ istnieje taki przedział domknięty U_x, $x \in \mathrm{Int}U_x$, że $M_{U_x}(f) - m_{U_x}(f) < \varepsilon$. Ponieważ A jest zwarty, pewna skończona liczba $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ spośród U_x pokrywa A. Niech P taki podział A, że każdy podprzedział S z P zawiera się w jakimś U_{x_i}. Wtedy $M_S(f) - m_S(f) < \varepsilon$ dla każdego podprzedziału S podziału P, tak więc:

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_S [M_S(f) - m_S(f)] \cdot v(S) < \varepsilon \cdot v(A).$$

□

Twierdzenie 28. *Niech A przedział domknięty, a $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcja ograniczona. Niech B zbiór nieciągłości funkcji f. Wówczas f jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy B jest zbiorem miary 0.*

Dowód:

$\Leftarrow$ Niech B ma miarę zero i niech $\varepsilon > 0$ oraz $B_\varepsilon = \{x \in A\colon o(f,x) \geqslant \varepsilon\}$. Wtedy $B_\varepsilon \subset B$, więc B_ε ma miarę zero. Ponieważ B_ε – domknięty i ograniczony, to zwarty, zatem z twierdzenia (27) B_ε ma objętość 0. Czyli istnieje $\{U_1, \ldots, U_n\}$ – skończona rodzina przedziałów domkniętych pokrywających B, że $\sum\limits_{i=1}^{n} v(U_1) < \varepsilon$. Niech dalej P – podział przedziału A taki, że każdy jego podprzedział S należy do jednej z dwóch grup

$$\mathcal{S}_1 = \{S\colon S \subset U_i \text{ dla pewnego } i \in \{1, \ldots, n\}\} \quad \text{lub} \quad \mathcal{S}_2 = \{S\colon S \cap B_\varepsilon = \emptyset\}.$$

To jest dobrze określone, bo: $B_\varepsilon \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$.

Niech $f(x) < M$ dla $x \in A$ (bo f – ograniczona). Wówczas:

$$\forall_S \quad M_S(f) - m_S(f) < 2M.$$

Stąd

$$\sum_{S \in \mathcal{S}_2} [M_S(f) - m_S(f)] \cdot v(S) < 2M \sum_{i=1}^{n} v(U_i) < 2M\varepsilon.$$

Jeśli $S \in \mathcal{S}_2$, to $\forall_{x \in S} \quad o(f,x) < \varepsilon$. Zatem z lematu istnieje takie rozdrobnienie P' podziału P, że:

$$\sum_{S' \subset S} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] \cdot v(S') < \varepsilon v(S) \quad \text{dla} \quad S \in \mathcal{S}_2.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} U(f,P') - L(f,P') &= \sum_{S' \subset S \in \mathcal{S}_1} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] \cdot v(S') + \sum_{S' \subset S \in \mathcal{S}_2} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] \cdot v(S') < \\ &< 2M\varepsilon + \sum_{S \in \mathcal{S}_2} \varepsilon \cdot v(S) \leqslant 2M\varepsilon + \varepsilon \cdot v(A). \end{aligned}$$

Z dowolności $\varepsilon > 0$, wynika, że możemy znaleźć taki podział P', by $U(f,P') - L(f,P')$ było dowolnie małe, czyli f – całkowalna.

$\Rightarrow$ Niech f – całkowalna. Ponieważ $B = B_1 \cup B_{\frac{1}{2}} \cup B_{\frac{1}{3}} \cup \ldots$ to z twierdzenia (25) wystarczy wykazać, że $B_{\frac{1}{n}}$ jest miary zero lub równoważnie (ze zwartości), że jest objętości zero dla $n = 1, 2 \ldots$. W tym celu ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech P – podział A taki, że $U(f,P) - L(f,P) < \dfrac{\varepsilon}{n}$. Niech dalej $\mathcal{S} = \{S$ – podprzedziały $P\colon \mathrm{Int} S \cap B_{\frac{1}{n}} \neq \emptyset\}$, czyli $M_S(f) - m_S(f) \geqslant \dfrac{1}{n}$ dla $\mathcal{S} \in \zeta$. Stąd

$$\frac{1}{n} \sum_{S \in \mathcal{S}} v(S) \leqslant \sum_{S \in \mathcal{S}} [M_S(f) - m_S(f)] \cdot v(S) \leqslant \sum_{S} [M_S(f) - m_S(f)] v(S) < \frac{\varepsilon}{n},$$

czyli $\sum\limits_{S \in \zeta} v(S) < \varepsilon$.

Pozostają punkty zbioru $B_{\frac{1}{n}}$ leżące na brzegach podprzedziałów S podziału P, lecz brzegi tych wszystkich przedziałów można pokryć skończoną rodziną przedziałów o całkowitej objętości mniejszej niż ε. Stąd dostajemy pokrycie $B_{\frac{1}{n}}$ mające całkowitą objętość mniejszą niż 2ε. $\square$

11.3. **Całki po dowolnych zbiorach $C \subset \mathbb{R}^n$.**

Definicja 29. Niech $C \subset \mathbb{R}^n$. *Funkcją charakterystyczną* χ_C zbioru C nazywamy funkcję

$$\chi_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad x \notin C \\ 1 & \text{gdy} \quad x \in C. \end{cases}$$

Definicja 30. Jeżeli $C \subset A$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^n$ – przedział domknięty i $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ ograniczona to *całką z f po C* nazywamy

$$\int_C f = \int_A f \cdot \chi_C, \quad \text{o ile} \quad f \cdot \chi_C \quad \text{jest całkowalna.}$$

Twierdzenie 29. *Funkcja $\chi_C \colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna wtedy i tylko wtedy gdy brzeg C ma miarę 0.*

Dowód. Niech $x \in \mathrm{Int}C$. Wówczas $\exists_{U \subset C}$ przedział otwarty, że $x \in U$. Wówczas $\chi_C = 1$ na U, czyli χ_C jest ciągła w x. Jeśli $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{C}$ to $\exists_{U \subset \mathbb{R} \setminus C}$, że $x \in U$. Wówczas $\chi_C = 0$ na U i χ_C jest ciągła w x. Jeżeli $x \in \partial C$, to $\forall_U\ x \in U$ – przedział otwarty $\exists_{y_1, y_2 \in U}$, że $y_1 \in U \cap C (\chi_C(y_1) = 1)$ i $y_2 \in U \cap (\mathbb{R}^n \setminus C)(\chi_C(y_2) = 0)$, czyli χ_C jest nieciągła. Zatem ∂C jest zbiorem nieciągłości funkcji, więc z twierdzenia 28 dostajemy tezę. $\square$