12.1. **Twierdzenie Fubiniego.** Załóżmy, że $f\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ dodatnia funkcja ciągła. Niech $t_0,\dots,t_n$ — podział odcinka $[a,b]$ dzielący $[a,b]\times[c,d]$ na n pasków za pomocą odcinków $\{t_i\}\times[c,d]$. Niech $g_x(y):=f(x,y)$. Wówczas pole pod wykkresem f i powyżej $\{x\}\times[c,d]$ wynosi

$$\int_c^d g_x=\int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Zatem objętość obszaru pod wykresem f i powyżej $[t_{i-1},t_i]\times[c,d]$ wynosi w przybliżeniu $(t_i-t_{i-1})\int_c^d f(x,y)\,dy$ dla dowolnego $x\in[t_{i-1},t_i]$. Zatem

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f=\sum_{i=1}^n\int_{[t_{i-1},t_i]\times[c,d]}\approx\sum_{i=1}^n(t_i-t_{i-1})\int_c^d f(x_i,y)\,dy\quad\text{dla}\quad x_i\in[t_{i-1},t_i].$$

Z drugiej strony podobne sumy pojawiają się w definicji całki

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Zatem jeśli $h(x)=\int_c^d g_x=\int_c^d f(x,y)\,dy$, to można miec nadzieję, że h jest całkowalna na przedziale $[a,b]$ oraz

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f\overset{?}{=}\int_a^b h=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Dla f — ciągłej dobrze, ale ogólnie trzeba uważać. Np jeśli zbiór nieciągłości funkcji f to $\{x_0\}\times[c,d]$, $x_0\in[a,b]$, to f całkowalna na $[a,b]\times[c,d]$, ale $h(x_0)=\int_c^d f(x_0,y)\,dy$ może nie być określone.

Definicja 31. Niech $f\colon A\to\mathbb{R}$ funkcja ograniczona na przedziale domkniętym. Wówczas *dolną* (odp. *górną*) *całkę* z f na A definiujemy jako

$$L\int_A f=\sup_{P\text{ – podział }A}L(f,P)\qquad\Big(\text{odp. } U\int_A f=\inf_{P\text{ – podział }A}U(f,P)\Big),$$

gdzie

$$L(f,P)=\sum_{S\in P}m_S(f)v(S)\quad\text{i}\quad m_S(f)=\inf\{f(x)\colon x\in S\},$$
$$U(f,P)=\sum_{S\in P}M_S(f)v(S)\quad\text{i}\quad M_S(f)=\sup\{f(x)\colon x\in S\}.$$

Twierdzenie 30 (Twierdzenie Fubiniego)**.** *Niech $A\subset\mathbb{R}^n$ i $B\subset\mathbb{R}^m$ przedziały domknięte i $f\colon A\times B\to\mathbb{R}$ całkowalna. Niech dla $x\in A$ funkcja $g_x\colon B\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem $g_x(y)=f(x,y)$ i przyjmijmy*

$$\mathcal{L}(x)=L\int_B g_x=L\int_B f(x,y)\,dy,\qquad\mathcal{U}(x)=U\int_B g_x=U\int_B f(x,y)\,dy.$$

Wówczas $\mathcal{L}$ i $\mathcal{U}$ są całkowalne na A i zachodzi

$$\int_{A\times B} f=\int_A\mathcal{L}=\int_A\left(L\int_B f(x,y)\,dy\right)dx,\qquad\int_{A\times B} f=\int_A\mathcal{U}=\int_A\left(U\int_B f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Dowód: Niech P_A — podział A i P_B — podział B. Wspólnie dają one taki podział P przedziału $A\times B$, że każdy jego podprzedział ma postać $S_A\times S_B$, gdzie S_A — podprzedział P_A i S_B — podprzedział P_B. Zatem

$$L(f,P)=\sum_S m_S(f)\cdot v(S)=\sum_{S_A,S_B}m_{S_A\times S_B}(f)\cdot v(S_A\times S_B)=\sum_{S_A}\left(\sum_{S_B}m_{S_A\times S_B}(f)\cdot v(S_B)\right)\cdot v(S_A).$$

Jeżeli $x\in S_A$, to $m_{S_A\times S_B}(f)\leqslant m_{S_B}(g_x)$. Stąd dla $x\in S_A$ mamy

$$\sum_{S_B}m_{S_A\times S_B}(f)\cdot v(S_B)\leqslant\sum_{S_B}m_{S_B}(g_x)\cdot v(S_B)\leqslant L\int_B g_x=\mathcal{L}(x).$$

Stąd z dowolności wyboru $x \in S_A$

$$\sum_{S_A}\Big(\sum_{S_B} m_{S_A\times S_B}(f)\cdot v(S_B)\Big)\cdot v(S_A) \leqslant \sum_{S_A} m_{S_A}(\updownarrow)\cdot v(S_A) = L(\mathcal{L}, P_A).$$

Otrzymujemy więc ciąg nierówności

$$L(f,P) \overset{\text{pokazaliśmy}}{\leqslant} L(\mathcal{L}, P_A) \overset{\text{suma dolna}\leqslant\text{suma górna}}{\leqslant} U(\mathcal{L}, P_A) \overset{\mathcal{L}\leqslant\mathcal{U}}{\leqslant} U(\mathcal{U}, P_A) \overset{\text{analogicznie}}{\leqslant} U(f,P).$$

Ale f jest całkowalna, więc $\sup_P L(f,P) = \inf_P U(f,P) = \int_{A\times B} f$. Zatem $\sup_{P_A} L(\mathcal{L}, P_A) = \inf_{P_A} U(\mathcal{L}, P_A) = \int_{A\times B} f$. Oznacza to, że funkcja $\mathcal{L}(x)$ jest całkowalna na A i $\int_{A\times B} f = \int_A \mathcal{L}$.

Podobnie z nierówności

$$L(f,P) \leqslant L(\mathcal{L}, P_A) \leqslant L(\mathcal{U}, P_A) \leqslant U(\mathcal{U}, P_A) \leqslant U(f,P)$$

wynika teza dla $\mathcal{U}(x)$. □

Uwaga 17.

(1) Podobnie wykazuje się, że

$$\int_{A\times B} f = \int_B \Big(L\int_A f(x,y)\,dx\Big)\,dy = \int_B \Big(U\int_A f(x,y)\,dx\Big)\,dy.$$

(2) Często g_x jest całkowalna (np jeśli $f(x,y)$ jest ciągła), czyli

$$\int_{A\times B} f = \int_A \Big(\int_B f(x,y)\,dy\Big)\,dx.$$

(3) Jeżeli g_x jest niecałkowalna dla skończonej liczby $x \in A$, czyli $\mathcal{L}(x) = \int_B f(x,y)\,dy$ dla wszystkich x poza skończoną liczbą, to wówczas po przedefiniowaniu $\mathcal{L}(x)$ w skończonej liczbie punktów otrzymujemy $\int_{A\times B} f = \int_A \Big(\int_B f(x,y)\,dy\Big)\,dx$, gdzie $\int_B f(x,y)\,dy$ określamy jako 0 tam, gdzie nie istnieje.

(4) Jeżeli $A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ i $f\colon A \to \mathbb{R}$ jest wystarczająco przyzwoita, to stosując wielokrotnie twierdzenie Fubiniego dostajemy

$$\int_A f = \int_{a_n}^{b_n}\Big(\ldots\Big(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\Big)\ldots\Big)\,dx_n.$$

12.2. **Rozkład jedności.**

Definicja 32. Rodzina zbiorów otwrtych $\mathcal{O}$ jest *pokryciem otwartym* zbioru A jeżeli każdy punkt $x \in A$ należy do jakiegoś zbioru otwartego z rodziny $\mathcal{O}$.

Definicja 33. *Rozkładem jedności klasy* C^∞ dla zbioru A nazywamy rodzinę Φ funkcji φ klasy C^∞ określonych na zbiorze otwartym zawierającym A mających następujące własności:

1) Dla każdego $x \in A$ zachodzi $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$.
2) Dla każdego $x \in A$ istnieje otwarte otoczenie V punktu x, takie że, poza skończoną liczbą, wszystkie $\varphi \in \Phi$ są równe 0 na V.
3) Dla każdego $x \in A$ zachodzi $\sum_{\varphi\in\Phi} \varphi(x) = 1$.

Jeśli $\mathcal{O}$ jest pokryciem otwartym A, to mówimy, że rozkład jedności Φ jest *wpisany w pokrycie* $\mathcal{O}$, jeśli oprócz 1) – 3) spełnia też

4) Dla każdego $\varphi \in \Phi$ istnieje $U \in \mathcal{O}$, takie ze $\varphi = 0$ poza pewnym zbiorem domkniętym zawartym w U.

Zachodzi

Twierdzenie 31. *Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ i niech $\mathcal{O}$ będzie pokryciem otwartym A. Wówczas istnieje rozkład jedności klasy C^∞ wpisany w pokrycie $\mathcal{O}$.*

Definicja 34. Pokrycie otwarte $\mathcal{O}$ zbioru otwartego $A \subset \mathbb{R}^n$ jest *dopuszczalne*, jeżeli każdy $U \in \mathcal{O}$ jest zawarty w A.