Niech $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ma ciągłą pochodną i $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągła. Wówczas

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g) \cdot g'. \tag{13}$$

Jeżeli $F' = f$ to $L = F(g(b)) - F(g(a))$. Z drugiej strony $(F \circ g)' = (F' \circ g) \cdot g' = (f \circ g) \cdot g'$, czyli $P = F \circ g(b) - F \circ g(a) = L$.

Niech dodatkowo g będzie różnowartościowe. Wówczas

$$\int_{g((a,b))} f = \int_{(a,b)} (f \circ g) \cdot |g'|,$$

bo:

$$g \nearrow\colon \quad g' > 0 \quad L = \int_{g(a)}^{g(b)} f, \quad P = \int_a^b (f \circ g) \cdot g' \quad \text{z (13)} \quad L = P$$
$$g \searrow\colon \quad g' < 0 \quad L = \int_{g(b)}^{g(a)} f, \quad P = -\int_a^b (f \circ g) \cdot g' \quad \text{z (13)} \quad L = P.$$

Twierdzenie 32 (o całkowaniu przez podstawienie)**.** *Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym zaś $g\colon A \to \mathbb{R}^n$ dyfeomorfizmem na obraz. Jeżeli $f\colon g(A) \to \mathbb{R}$ jest całkowalna, to*

$$\int_{g(A)} f = \int_A (f \circ g) \cdot |\det Dg|.$$

Lemat L 1. *Niech $\mathcal{O}$ będzie takim dopuszczalnym pokryciem zbioru A, że dla każdego $U \in \mathcal{O}$ i każdej całkowalnej f mamy*

$$\int_{g(U)} f = \int_U (f \circ g) \cdot |\det Dg|. \tag{14}$$

Twierdzenie 32 jest wówczas prawdziwe dla całego A.

Dowód Lematu L1: Rodzina wszystkich $g(U)$ jest pokryciem otwartym $g(A)$. Niech Φ rozkład jedności wpisany w te pokrycie. Jeżeli $\varphi = 0$ poza $g(U)$, to z różnowartościowości g mamy, że $(\varphi \cdot f) \circ g = 0$ poza U. Stąd

$$\int_{g(U)} \varphi \cdot f = \int_U [(\varphi \cdot f) \circ g] \cdot |\det Dg|$$

można zapisać w postaci

$$\int_{g(A)} \varphi \cdot f = \int_A [(\varphi \cdot f) \circ g] \cdot |\det Dg|$$

i dalej

$$\int_{g(A)} f = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_{g(A)} \varphi \cdot f = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A [(\varphi \cdot f) \circ g] \cdot |\det Dg| = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A (\varphi \circ g) \cdot (f \circ g) \cdot |\det Dg|$$
$$= \int_A (f \circ g) \cdot |\det Dg|.$$

□

Uwaga 18. Założenie (14) możemy zastąpić przez

$$\int_V f = \int_{g^{-1}(V)} (f \circ g) \cdot |\det Dg|$$

dla wszystkich V z pewnego dopuszczalnego pokrycia $g(A)$.

Lemat L 2. *Wystarczy dowieść twierdzenia dla funkcji* $f = 1$.

Dowód Lematu L2: Jeżeli twierdzenie zachodzi dla $f = 1$, to zachodzi dla funckji stałych. Niech V — przedział w $g(A)$ i P — podział tego przedziału. Dla każdego podprzedziału S podziału P niech $f_S := m_S(f)$. Wówczas

$$L(f,P) = \sum_S m_S(f)v(S) = \sum_S \int_{\mathrm{Int}\, S} f_S = \sum_S \int_{g^{-1}\mathrm{Int}\, S} (f_S \circ g) \cdot |\det Dg|$$
$$\leqslant \sum_S \int_{g^{-1}\mathrm{Int}\, S} (f \circ g) \cdot |\det Dg| \leqslant \int_{g^{-1}(V)} (f \circ g) \cdot |\det Dg|.$$

Stąd

$$\int_V f = \sup_P L(f,P) \leqslant \int_{g^{-1}(V)} (f \circ g) \cdot |\det Dg|.$$

Postępując podobnie dla $f_S = M_S(f)$ dostajemy

$$\int_V f = \inf_P U(f,P) \geqslant \int_{g^{-1}(V)} (f \circ g) \cdot |\det Dg|.$$

Teza Lematu L2 wynika z L1. □

Lemat L 3. *Jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla* $g\colon A \to \mathbb{R}^n$ *i* $h\colon B \to \mathbb{R}^n$*, gdzie* $g(A) \subset B$*, to jest ono prawdziwe dla* $h \circ g\colon A \to \mathbb{R}^n$.

Dowód Lematu L3:

$$\int_{(h\circ g)(A)} f = \int_{h(g(A))} f = \int_{g(A)} (f \circ h)|\det Dh| = \int_A (f \circ h) \circ g \cdot (|\det Dh| \circ g)|\det Dg|$$
$$= \int_A [f \circ (h \circ g)]|\det D(h \circ g)|.$$

□

Lemat L 4. *Twierdzenie jest prawdziwe jeśli* g *jest przekształceniem liniowym.*

Dowód Lematu L4: Na mocy Lematów L1 i L2 wystarczy pokazać, że dla dowolnego przedziału otwartego U zachodzi

$$\int_{g(U)} 1 = \int_U |\det Dg|,$$

czyli, że $V(g(U)) = |\det Dg| \cdot V(U)$. Ponieważ g jest przekształceniem liniowym, to $g(x) = Ax$, zatem wystarczy pokazać, że $V(A(U)) = |\det A| \cdot V(U)$. A to wynika z faktu, że g jest złożeniem przekształceń następujących typów:

(1) $g(e_i) = e_i$ dla $i \neq j$ i $g(e_j) = ae_j$,
(2) $g(e_i) = e_i$ dla $i \neq j$ i $g(e_j) = e_j + e_k$,
(3) $g(e_k) = e_k$ dla $k \neq i, j$, $g(e_i) = e_j$ i $g(e_j) = e_i$.

Łatwo widzieć, że dla każdego przekształcenia z powyższych typów żądana równość zachodzi □

Uwaga 19. Z Lematów L3 i L4 wynika, że dla dowolnego ustalonego $a \in A$ możemy założyć, że $Dg(a) = I$. Istotnie, jeśli $T = Dg(a)$, to $D(T^{-1} \circ g)(a) = I$. Z Lematu L4 twierdzenie jest prawdziwe dla T. Jeśli wykażemy, że jest też prawdziwe dla $T^{-1} \circ g$, to z Lematu L3 dostaniemy, że jest też prawdziwe dla g.

Dowód Twierdzenia 32: Indukcja ze względu na wymiar n.

Dla $n = 1$ dowód wynika z Lematu L1 i z uwagi na początku.

Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe w wymiarze $n-1$, pokażemy, że jest też prawdziwe w wymiarze n.

Wystarczy dla każdego $a \in A$ znaleźć zbiór otwarty U, gdzie $a \in U \subset A$, dla którego twierdzenie jest prawdziwe. Możemy założyć, że $Dg(a) = I$. Niech $h\colon A \to \mathbb{R}^n$ będzie zdefiniowane jako $h(x) = (g_1(x), \ldots, g_{n-1}(x), x_n)$. Wówczas $Dh(a) = I$. Zatem z twierdzenia o funkcji odwrotnej (Twierdzenie 10) istnieje otwarte otoczenie $U' \subset A$ punktu a, że h jest różnowartościowa i nieosobliwa (tzn. $\det Dh(x) \neq 0$) na U'.

Niech $k\colon h(U') \to \mathbb{R}^n$ będzie zdefiniowane jako $k(x) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, g_n(h^{-1}(x)))$. Wtedy $g = k \circ h$. Zatem g — złożenie dwóch odwzorowań, z których każde zmienia mniej niż n współrzędnych. Czy k dyfeomorfizm?

$$D(g_n \circ h^{-1})(h(a)) = Dg_n(a) \circ [Dh(a)]^{-1} = Dg_n(a).$$

Zatem $D_n(g_n \circ h^{-1})(h(a)) = D_n g_n(a) = 1$. Stąd $(Dk)(h(a)) = I$. Zatem istnieje zbiór otwarty V taki, że $h(a) \in V \subset h(U')$ oraz $k(x)$ jest różnowartościowy i $\det Dk(x) \neq 0$ na V. Biorąc $U = h^{-1}(V)$ mamy $g = k \circ h$, gdzie $h\colon U \to \mathbb{R}^n$ i $k\colon V \to \mathbb{R}^n$ oraz $h(U) \subset V$. Na mocy Lematu L3 wystarczy dowieść twierdzenia dla h i k. Pokażemy dowód dla h (dla k podobnie).

Niech $W \subset U$ przedział postaci $D \times [a_n, b_n]$. Z twierdzenia Fubiniego (Twierdzenie 30)

$$\int_{h(W)} 1 = \int_{[a_n,b_n]} \left(\int_{h(D\times\{x_n\})} 1 \, dx_1 \ldots dx_{n-1} \right) dx_n \qquad \text{(bo } h \text{ nie rusza ostatniej współrzędnej).}$$

Niech $h_{x_n}\colon D \to \mathbb{R}^n$ będzie zdefiniowane jako

$$h_{x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)).$$

Wówczas h_{x_n} jest różnowartościowa, $\det Dh_{x_n} = \det Dh \neq 0$ oraz

$$\int_{h(D\times\{x_n\})} 1 \, dx_1 \ldots dx_{n-1} = \int_{h_{x_n}(D)} 1 \, dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

Stosując założenie indukcyjne (dla $n-1$):

$$\int_{h(W)} 1 = \int_{[a_n,b_n]} \left(\int_{h_{x_n}(D)} 1 \, dx_1 \ldots dx_{n-1} \right) dx_n$$
$$= \int_{[a_n,b_n]} \left(\int_D |\det Dh_{x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1})| \, dx_1 \ldots dx_{n-1} \right) dx_n$$
$$= \int_{[a_n,b_n]} \left(\int_D |\det Dh(x_1, \ldots, x_n)| \, dx_1 \ldots dx_{n-1} \right) dx_n = \int_W |\det Dh|.$$

□