Definicja 35. *Krzywą w* $\mathbb{R}^n$ nazywamy odwzorowanie ciągłe $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $a \subset b$, $[a,b] \subset \mathbb{R}^n$.
Początkiem i *końcem* krzywej γ nazywamy odpowiednio punkt $\gamma(a)$ i $\gamma(b)$.
Krzywą γ nazywamy *konturem* lub *krzywą zamkniętą* jeśli $\gamma(a) = \gamma(b)$.
Krzywą γ nazywamy *kawałkami gładką* jeśli istnieja takie $a = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_m = b$, że γ na $[a_{j-1}, a_j]$ jest klasy C^1 ($j = 1, ..., m$).
Długością krzywej kawałkami gładkiej $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ nazywamy liczbę

$$|\gamma| := \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

14.1. **Całka krzywoliniowa niezorientowana (I rodzaju).**

Wprowadźmy następujące oznaczenia. Niech $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ krzywa kawałkami gładka, $P = t_0, t_1, ..., t_n$, gdzie $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ — podział odcinka $[a,b]$ na m odcinków, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ — dlugość k-tego odcinka podziału P, $\delta(P) = \max\{\Delta t_k \colon 1 \leqslant k \leqslant m\}$ — średnica podziału P, $t_k^* \in [t_{k-1}, t_k]$ — punkt pośredni.

Definicja 36. Niech f — funkcja ograniczona na krzywej γ. *Całkę krzywoliniową niezorientowaną* z funkcji f po łuku γ definiujemy wzorem:

$$\int_\gamma f\, ds = \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^m f(\gamma(t_k^*))\Delta S_k,$$

gdzie ΔS_k jest długością łuku łączącego punkty $\gamma(t_{k-1})$ i $\gamma(t_k)$, czyli

$$\Delta S_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

Uwaga 20. Porównując definicję całki krzywoliniowej z całką Riemanna funkcji jednej zmiennej dostajemy:

$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\, dt = \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^m f(\gamma(t_k^*)\|\gamma'(t_k^*)\|(t_k - t_{k-1}).$$

Uwaga 21. Definicja nie zależy od wyboru parametryzacji krzywej γ, ani od wyboru orientacji

$$\int_\gamma f\, ds = \int_{-\gamma} f\, ds,$$

gdzie $-\gamma(t) := \gamma(-t)$, $-\gamma\colon [-b,-a] \to \mathbb{R}^n$.

14.2. **Całka krzywoliniowa zorientowana (II rodzaju).**

Definicja 37. *Polem wektorowym* na obszarze $D \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy funkcję wektorową określoną wzorem $F(x) = (F_1(x), ..., F_n(x))$ dla każdego $x \in D$.

Definicja 38. *Całkę krzywoliniową zorientowaną* z pola wektorowego F po łuku γ definiujemy wzorem:

$$\int_\gamma F\, dx = \int F_1\, dx_1 + ... + F_n d\, x_n = \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^m F_1(\gamma(t_k^*))\Delta x_{1k} + ... + F_n(\gamma(t_k^*))\Delta x_{nk}$$
$$= \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^m F(\gamma(t_k^*)) \cdot \Delta x_k,$$

gdzie $\Delta x_k = (\Delta x_{1k}, ..., \Delta x_{nk})$, zaś $\Delta x_{ik} = \gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})$ jest przyrostem i-tej współrzędnej γ na $[t_{k-1}, t_k]$.

Uwaga 22. W zapisie wektorowym definicja ta ma postać:

$$\int_\gamma \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^m \vec{F}(\vec{x}_k) \cdot d\vec{x}_k.$$

Uwaga 23. Porównując definicję całki krzywoliniowej zorientowanej z całką Riemanna dostajemy

$$\int_\gamma F\,dx = \int_a^b F(\gamma)t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(\gamma(t))\gamma_i'(t)\,dt.$$

Uwaga 24. Definicja nie zależy od wyboru parametryzacji, a przy zmienie orientacji zmienia się na przeciwną

$$\int_{-\gamma} F\,dx = -\int_\gamma F\,dx.$$

14.3. **Związek pomiędzy całką krzywoliniową zorientowaną i niezorientowaną.** Niech γ — krzywa kawałkami gładka w $\mathbb{R}^n$. Wtedy $\gamma'(t)$ — wektor styczny do krzywej i skierowany zgodnie z orientacją. Składowa styczna do krzywej wyraża się wzorem $F_s = \|F\|\cos\alpha$, gdzie α — kąt pomiędzy $F(\gamma(t))$ i $\gamma'(t)$. Wówczas

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \|F(\gamma(t))\| \cdot \|\gamma'(t)\| \cos\alpha = F_s(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|,$$

czyli

$$\int_\gamma F\,dx = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_a^b F_s(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_\gamma F_s\,ds.$$

14.4. **Twierdzenie Greena.**

Twierdzenie 33 (Twierdzenie Greena)**.** *Niech $D \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie obszarem normalnym ze względu na obie osie, a $\gamma = \partial D$ brzegiem zbioru D zorientowanym dodatnio (tzn. przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). Jeżeli funkcje P i Q mają ciągłe pochodne cząstkowe w zbiorze D, to*

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Uwaga 25. Wzór Greena zapisuje się też w postaci

$$\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Dowód: Ponieważ D — normalny względem osi OX, to

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}.$$

Niech wykres funkcji $y = y_1(x)$ będzie łukiem γ_1, zaś $y = y_2(x)$ — łukiem γ_2. Wówczas $\gamma = \partial D$ spełnia $\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$.

Mamy

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right) dx = \int_a^b P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x))\,dx$$
$$= \int_{\gamma_2} P\,dx - \int_{\gamma_1} P\,dx = -\int_{-\gamma_2} P\,dx - \int_{\gamma_1} P\,dx = -\int_\gamma P\,dx = -\oint_{\partial D} P\,dx.$$

Podobnie, korzystając z normalności względem osi OY dostajemy

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \oint_{\partial D} Q\,dy.$$

Stąd

$$\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

□

Uwaga 26. Twierdzenie pozostaje prawdziwe jeśli D jest skończoną sumą zbiorów normalnych, czyli gdy $D = D_1 \cup \ldots \cup D_n$, gdzie $D_1, \ldots, D_n$ — zbiory normalne. Wówczas:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \sum_{i=1}^n \oint_{\partial D_i} P\,dx + Q\,dy = \oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy.$$

Przykład 14. Ze wzoru Greena wynikają natychmiast następujące wzory na pole powierzchni:

$$V(D) = -\oint_{\partial D} y\,dx \quad \text{i} \quad V(D) = \oint_{\partial D} x\,dy,$$

bo:

$$\oint_{\partial D} y\,dx = -\iint_D 1\,dx\,dy = -V(D), \qquad \oint_{\partial D} x\,dy = \iint_D 1\,dx\,dy = V(D).$$

14.5. **Pola potencjalne.**

Definicja 39. Pole wektorowe F określone na obszarze $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nazywamy *potencjalnym*, gdy istnieje funkcja $U\colon D \to \mathbb{R}$ taką że,

$$F = \operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial U}{\partial x_n}\right).$$

Funkcję U nazywamy wówczas *potencjałem* pola.

Uwaga 27. Dla pola na płaszczyźnie $F = (P, Q)$ warunek ten ma postać $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$. Zaś w przestrzeni $F = (P, Q, R)$: $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$, $R = \frac{\partial U}{\partial z}$.

Stwierdzenie 4. *Niech pole wektorowe F określone na $D \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie ciągłe i całkowalne. Wówczas całka krzywoliniowa po krzywej $\gamma\colon [a, b] \to D$ nie zależy od drogi całkowania i wyraża się wzorem*

$$\int_\gamma F\,dx = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)).$$

Dowód:

$$\int_\gamma F\,dx = \int_a^b F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{grad} U(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}U(\gamma(t))\,dt = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)).$$

□

Uwaga 28. Jeśli całka nie zależy od drogi całkowania, to pole F jest potencjalne. Wówczas $U(x) = \int_{\gamma_x} F\,dx$, gdzie γ_x — krzywa łącząca określony punkt x_0 z x.

Stwierdzenie 5 (Warunek konieczny i wystarczający potencjalności pola)**.** *Niech $F = (P, Q)$ — pole wektorowe klasy C^1 na obszarze jednospójnym $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Wówczas pole F jest potencjalne na D wtedy i tylko wtedy gdy $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$.*

Dowód: $\Rightarrow$: Jeśli F — pole potencjalne, to $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$. Wówczas

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$\Leftarrow$: Z twierdzenie Greena (twierdzenie 33) mamy

$$\int_{\partial D} F\,dx = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0.$$

Zatem jeśli $\partial D = \gamma_1 - \gamma_2$, to $\int_{\gamma_1} F\,dx = \int_{\gamma_2} F\,dx$, co oznacza, że pole F jest potencjalne. □