2. WYKŁAD. POCHODNE KIERUNKOWE I CZĄSTKOWE, ODWZOROWANIA LINIOWE I RÓŻNICZKI ODWZOROWAŃ, MACIERZ JACOBIEGO I JAKOBIAN.

2.1. **Pochodne kierunkowe i cząstkowe.**

Definicja 6. Niech $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, G otwarty, $x_0 \in G$ i $v \in \mathbb{R}^n$. *Pochodną kierunkową funkcji f w punkcie x_0 w kierunku wektora v* nazywamy granicę:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}.$$

Oznaczamy ją: $f'_v(x_0)$, $D_v f(x_0)$ albo $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$.

Uwaga 5. Jeśli określimy $g(t) = f(x_0+tv)$, to istnieje $a > 0$ takie, że $g\colon (-a, a) \to \mathbb{R}$ (bo G otwarty) oraz

$$g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = f'_v(x_0).$$

Uwaga 6. Istnienie pochodnej kierunkowej w x_0 (nawet we wszystkich kierunkach) nie gwarantuje ciągłości w x_0.

Przykład 3.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{dla} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Niech $v = (v_1, v_2)$. Wówczas:

a) jeśli $v_1 = 0$ to $f'_v(0, 0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(tv_1,tv_2)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(0,tv_2)}{t} = 0$,
b) jeśli $v_1 \neq 0$ to $f'_v(0, 0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(tv_1,tv_2)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^3 v_1^2+t^5 v_2^4} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2+t^2 v_2^4} = \frac{v_2^2}{v_1}$.

Zatem dla każdego $v \in \mathbb{R}^2$ istnieje $f'_v(0, 0)$, ale f nie jest ciągła w $(0, 0)$, bo dla $(x_k, y_k) = (\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k})$ zachodzi $\lim_{k\to\infty}(x_k, y_k) = (0, 0)$ oraz

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \lim_{k\to\infty} f(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^4}} = \frac{1}{2} \neq f(0, 0).$$

Definicja 7. Niech $f\colon G \overset{\text{otw.}}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $x_0 \in G$. Jeśli jako wektor v przyjmiemy wektor jednostkowej bazy standardowej $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (1 na i-tym miejscu) to pochodną kierunkową w x_0 w kierunku e_i nazywamy *pochodną cząstkowa w x_0 względem x_i* i oznaczamy przez $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ lub $f'_{x_i}(x_0)$ lub $D_i f(x_0)$ czyli

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{t} = g'(x_i),$$

gdzie $g\colon x_i \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

2.2. **Odwzorowania liniowe.**

Definicja 8. Niech X, Y — rzeczywiste przestrzenie liniowe. Odwzorowanie $A\colon X \to Y$ nazywamy *liniowym* jeśli spełnia:

1) $A(x + y) = Ax + Ay \; \forall_{x,y\in X}$,
2) $A(cx) = cA(x) \; \forall_{c\in\mathbb{R}} \forall_{x\in X}$.

Zbiór wszystkich odwzorowań liniowych $X \to Y$ będziemy oznaczać przez $L(X, Y)$. Tworzy on też przestrzeń liniową, bo $(A + B)x = Ax + Bx$ oraz $(cA)x = cAx \; \forall_{x\in X} \forall_{c\in\mathbb{R}}$.

Przykład 4. $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ — zbiór wszystkich odwzorowań liniowych $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^k$ — można go utożsamić ze zbiorem wszystkich macierzy rzeczywistych $M(n \times k, \mathbb{R})$ tzn.

$$A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,n} \end{pmatrix}.$$

2.3. **Różniczkowalność.** Przypomnijmy sobie przypadek 1-wymiarowy. Jeśli $f\colon (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in (a,b)$ to $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Zatem $f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + r(h)$, gdzie reszta $r(h)$ spełnia

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) = 0,$$

czyli

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h|}{|h|} = 0.$$

Zauważmy, że liczbę $f'(x_0)$ możemy utożsamić z odwzorowaniem liniowym $L(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$.

Definicja 9. *Różniczką odwzorowania* $f\colon \overset{otw.}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *w punkcie* $x_0 \in G$ nazywamy takie odwzorowanie liniowe $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, jeśli ono istnieje, że

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}^n}} \frac{\|f(x_0+h)-f(x_0)-Ah\|}{\|h\|} = 0.$$

Zamiast A będziemy pisać $Df(x_0)$ lub $df(x_0)$.

Odwzorowanie f nazywamy *różniczkowalnym w* $x_0 \in G$ jeśli istnieje jego różniczka w x_0.

Odwzorowanie f nazywamy *różniczkowalnym w* G jeśli jest różniczkowalne w każdym punkcie $x_0 \in G$.

Przykład 5. (1) Jeżeli $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ jest zdefniowane jako $f(x) = c$, gdzie $c \in \mathbb{R}^k$ — stała, to f różniczkowalna i $Df(x) = 0\ \forall_{x\in\mathbb{R}^n}$, bo

$$\lim_{h\to 0,\ h\in\mathbb{R}^n} \frac{\|c-c-0\|}{\|h\|} = 0.$$

(2) Niech $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ będzie funkcją liniową $f(x) = Ax$, gdzie $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$. Wtedy f jest różniczkowalna i $Df(x) = A$, bo

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h)-f(x)-Ah\|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\|A(x+h)-A(x)-Ah\|}{\|h\|} = 0.$$

Uwaga 7. Jeśli $f\colon G \overset{\text{otw.}}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ różniczkowalna w x_0, to

$$f(x_0+h) = f(x_0) + Df(x_0)h + r(h), \quad \text{gdzie} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Zatem $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$, czyli f ciągła w x_0.

Twierdzenie 3. *Jeśli* $f\colon G \overset{otw.}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *różniczkowalna w* x_0*, to:*

1) f *ma dokładnie jedną różniczkę w* x_0*,*

2) dla każdego $h \in \mathbb{R}^n$ *istnieje pochodna kierunkowa* $\frac{df}{dh}(x_0)$ *i wyraża się ona wzorem*

$$\frac{df}{dh}(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dh}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{df_k}{dh}(x_0) \end{bmatrix} = Df(x_0)h,$$

3) istnieją pochodne cząstkowe $D_j f_i(x_0)$ $(i = 1, \dots, k,$ $j = 1, \dots, n)$ oraz

$$Df(x_0)h = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} D_j f_1(x_0)h_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} D_j f_k(x_0)h_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 f_1(x_0) & \cdots & D_n f_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_k(x_0) & \cdots & D_n f_k(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}.$$

Uwaga 8. Zatem

$$Df(x_0) = (D_j f_i(x_0))_{i=1,\dots,k^{j=1,\dots,n}} = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0))_{i=1,\dots,k^{j=1,\dots,n}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix} = \mathcal{J}_f(x_0).$$

Powyższą macierz $\mathcal{J}_f(x_0)$ nazywamy *macierzą Jacobiego* odwzorowania f w punkcie x_0.

Rozważmy szczególne przypadki:

1.) $k = n$. Jeżeli $f\colon G \overset{\text{otw.}}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, to *Jakobianem* odwzorowania f nazywamy wyznacznik macierzy Jacobiego $J_f(x_0) = det\mathcal{J}_f(x_0)$.

2.) $k = 1$. Jeżeli f jest funkcją, to macierz Jacobiego redukuje się do wektora

$$\mathcal{J}_f(x_0) = \left[\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \quad \cdots \quad , \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right],$$

który nazywamy *gradientem* funkcji f w x_0 i oznaczamy

$$\text{grad}\, f(x_0) = \left[\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \quad \cdots \quad , \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right].$$

Dowód Twierdzenia 3:

1.) Załóżmy, że $A_1, A_2 \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ spełniają definicję różniczki. Niech $B = A_1 - A_2$. Mamy:

$$\begin{aligned} \|Bh\| &= \| - (f(x+h) - f(x) - A_1 h) + (f(x+h) - f(x) - A_2 h)\| \\ &\leqslant \|f(x+h) - f(x) - A_1 h\| + \|f(x+h) - f(x) - A_2 h\|. \end{aligned}$$

Zatem $\frac{\|Bh\|}{\|h\|} \to 0$ gdy $h \to 0$. Wynika stąd, że dla określonego h zachodzi $\frac{\|B(th)\|}{\|th\|} \to 0$ gdy $t \to 0$. Z drugiej strony przekształcenie B jest liniowe, zatem $\frac{\|B(th)\|}{\|th\|} = \frac{|t|\|B(h)\|}{|t|\|h\|} = \frac{\|B(h)\|}{\|h\|}$, czyli $B(h) = 0$. Zatem $A_1 = A_2$.

2.) f jest różniczkowalna w x_0, czyli

$$(x_0 + th) - f(x_0) = Df(x_0)th + r(th), \quad \text{gdzie} \quad \lim_{t\to 0} \frac{\|r(th)\|}{\|th\|} = 0.$$

Zatem

$$\frac{df}{dh}(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Df(x_0)th + r(th)}{t} = \lim_{t\to 0}(\frac{tDf(x_0)h}{t} + \frac{r(th)}{t}) = Df(x_0)h.$$

3.) Przyjmując w szczególności $h = e_j$ $(j = 1, \dots, n)$ otrzymujemy istnienie pochodnych cząstkowych $D_j f_i(x_0)$ oraz równość

$$D_j f(x_0) = \begin{bmatrix} D_j f_1(x_0) \\ \vdots \\ D_j f_k(x_0) \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial e_j}(x_0) = Df(x_0)e_j \quad (j = 1, ..., n).$$

Zatem

$$Df(x_0)h = Df(x_0)\sum_{j=1}^{n} h_j e_j = \sum_{j=1}^{n} D_j f(x_0) h_j = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} D_j f_1(x_0) h_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} D_j f_k(x_0) h_j \end{bmatrix}.$$

$\square$