4.1. **Twierdzenie o funkcji odwrotnej.**

Lemat 1. *Niech* $\Omega = \{A \in L(\mathbb{R}^n)\colon \ker A = \{0\}\}$ *będzie zbiorem odwracalnych operatorów liniowych na* $\mathbb{R}^n$*.*

(1) Jeśli $A \in \Omega$, $B \in L(\mathbf{R}^n)$ *i* $|||B - A||| \cdot |||A^{-1}||| < 1$ *to* $B \in \Omega$.

(2) Ω *jest otwartym podzbiorem w* $L(\mathbf{R}^n)$ *i odwzorowanie* $A \mapsto A^{-1}$ *jest ciągłe.*

Dowód:

(1) $|||A^{-1}||| = \frac{1}{\alpha}$, $|||B - A||| = \beta$, $\beta < \alpha$,

$$\begin{aligned}\alpha\|x\| &= \alpha\|A^{-1}Ax\| \leqslant \alpha|||A^{-1}||| \cdot \|Ax\| = \|Ax\| = \|(A - B)x + Bx\|\\ &\leqslant \|(A - B)x\| + \|Bx\| \leqslant |||A - B||| \cdot \|x\| + \|Bx\| = \beta\|x\| + \|Bx\|.\end{aligned}$$

Zatem $(\alpha - \beta)\|x\| \leqslant \|Bx\|$, a stąd $Bx \neq 0$ dla $x \neq 0$. Oznacza to, że $\ker B = \{0\}$ (B jest 1-1), czyli $B \in \Omega$.

(2) $x = B^{-1}y$, $(\alpha - \beta)\|B^{-1}y\| \leqslant \|BB^{-1}y\| = \|y\|$, czyli $|||B^{-1}||| \leqslant (\alpha - \beta)^{-1}$. A stąd

$$|||B^{-1} - A^{-1}||| = |||B^{-1}(A - B)A^{-1}||| \leqslant |||B^{-1}||| \cdot |||A - B||| \cdot |||A^{-1}||| \leqslant \frac{\beta}{\alpha(\alpha - \beta)}.$$

Zatem $|||B^{-1} - A^{-1}||| \to 0$ jeśli $\beta = |||B - A||| \to 0$.

□

Twierdzenie 10 (o funkcji odwrotnej)**.** *Niech* $f\colon G \overset{otw}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *klasy* C^1 *i* $Df(a)$ *jest odwracalne dla pewnego* $a \in G$*. Wówczas:*

a) *istnieją zbiory otwarte* $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ *takie, że* $a \in U$, $b \in V$ *i* f *jest wzajemnie jednoznaczne (tzn. różnowartościowe i na) na* U *i* $V = f(U)$*,*

b) *jeśli* g *jest odwzorowaniem odwrotnym do* f*, zdefiniowanym na* V *wzorem* $g(f(x)) = x, \forall_{x\in U}$*, to* g *jest klasy* C^1*, oraz* $Dg(y) = \{Df(g(y))\}^{-1}, \forall_{y\in V}$*.*

Dowód:

a)

Oznaczmy $A = Df(a)$, A — macierz nieosobliwa ($\det A \neq 0$), tzn. A^{-1} istnieje. Wybierzmy λ tak, żeby $4\lambda|||A^{-1}||| = 1$ ($|||A^{-1}||| \neq 0$, bo A^{-1} nieosobliwa).

Ponieważ $f \in C^1(G)$, to istnieje otwarta kula U o środku w punkcie a taka, że

(1) $$|||Df(x) - A||| < 2\lambda, \quad \forall_{x\in U}.$$

Dla $x \in U$ i $x + h \in U$ zdefiniujemy

$$F(t) = f(x + th) - tAh \quad \text{dla} \quad t \in [0, 1].$$

Ponieważ U jest wypukły, to $x + th \in U$, dla $t \in [0, 1]$ i z (1)

$$\|F'(t)\| = \|Df(x + th)h - Ah\| \leqslant |||Df(x + th) - A||| \cdot \|h\| < 2\lambda\|h\| \leqslant \frac{1}{2}\|Ah\|,$$

bo

(2) $$2\lambda\|h\| = 2\lambda\|A^{-1}Ah\| \leqslant 2\lambda|||A^{-1}||| \cdot \|Ah\| = \frac{1}{2}\|Ah\|.$$

Z twierdzenia 9 (o wartości średniej dla odwzorowań) dostajemy, że dla pewnego $\theta \in [0, 1]$

$$\|F(1) - F(0)\| \leqslant \|F'(\theta)\| \leqslant \frac{1}{2}\|Ah\|, \quad \text{czyli}$$

(3) $$\|f(x + h) - f(x) - Ah\| \leqslant \frac{1}{2}\|Ah\|.$$

Wobec tego

$$\|f(x+h)-f(x)\| \geqslant \frac{1}{2}\|Ah\| \overset{(2)}{\geqslant} 2\lambda\|h\|, \tag{4}$$

bo $\|f(x+h)-f(x)\| + \|f(x+h)-f(x)-Ah\| \geqslant \|Ah\|$, czyli

$$\|f(x+h)-f(x)\| \geqslant \|Ah\| - \|f(x+h)-f(x)-Ah\| \geqslant \|Ah\| - \frac{1}{2}\|Ah\| = \frac{1}{2}\|Ah\|.$$

Ponieważ nierówność zachodzi dla każdego x, h takiego, że $x, x+h \in U$, to stąd w szczególności wynika, że f jest wzajemnie jednoznaczne na U, czyli $f\colon U \overset{1-1,\text{na}}{\to} f(U)$.

Pokażemy teraz, że $V = f(U)$ jest zbiorem otwartym. Niech $x_0 \in U$ i $S = B(x_0, r)$ takie, że $\overline{S} \subset U$. Wykażemy, że $f(S)$ zawiera kulę otwartą o środku w punkcie $f(x_0)$ i promieniu λr. W tym celu ustalmy y takie, że $\|y - f(x_0)\| < \lambda r$ i zdefiniujmy

$$\varphi(x) := \|y - f(x)\| \quad \text{dla} \quad x \in \overline{S}.$$

Jeśli $\|x - x_0\| = r$, to z (4) wynika, że

$$2\lambda r = 2\lambda\|x - x_0\| \leqslant \|f(x) - f(x_0)\| \leqslant \varphi(x) + \varphi(x_0) < \varphi(x) + \lambda r.$$

Zatem $\varphi(x_0) < \lambda r < \varphi(x)$ dla $\|x - x_0\| = r$.

Ponieważ φ jest ciągłe i $\overline{S}$ — zwarte, to istnieje $x^* \in \overline{S}$ takie, że $\varphi(x^*) \leqslant \varphi(x)$ dla każdego $x \in \overline{S}$. Wiemy, że $\varphi(x^*) \leqslant \varphi(x_0)$. Zatem $x^* \in S$. Przyjmijmy $w = y - f(x^*)$. Pnieważ A odwracalne, to istnieje $h \in \mathbb{R}^n$ takie, że $Ah = w$. Dobierzmy $t \in (0,1)$ tak małe, żeby $x^* + th \in S$. Wtedy

$$\|f(x^*) - y + Ath\| = \|tw - w\| = (1-t)\|w\|.$$

Ponadto

$$\|f(x^* + th) - f(x^*) - Ath\| \overset{(3)}{\leqslant} \frac{1}{2}\|Ath\| = \frac{1}{2}t\|w\|.$$

Stąd

$$\begin{aligned}\varphi(x^* + th) &= \|y - f(x^* + th)\| \leqslant \|f(x^*) - y + Ath\| + \|f(x^* + th) - f(x^*) - Ath\| \\ &\leqslant (1 - \frac{1}{2}t)\|w\| = (1 - \frac{1}{2}t)\|y - f(x^*)\| = (1 - \frac{1}{2}t)\varphi(x^*).\end{aligned}$$

Jeśli $\varphi(x^*) > 0$, to $\varphi(x^* + th) < \varphi(x^*)$, bo $t > 0$ — sprzeczność, bo $\varphi(x^*)$ — minimalne. Zatem $\varphi(x^*) = 0$, czyli $y = f(x^*)$, więc $y \in f(U)$ i $f(U)$ — otwarty, co kończy dowód części a).

b)

Niech $y \in V$, $y + k \in V$ i $x = g(y)$. Weźmy $h = g(y+k) - g(y)$. Ponieważ $|||Df(x) - A||| < 2\lambda$ i $|||A^{-1}||| = \frac{1}{4\lambda}$, to z Lematu 1 $Df(x)$ ma operator odwrotny, który oznaczamy przez $B = Df(x)^{-1}$. Niech $g(y+k) = h + g(y) = h + x$, $y + k = f(h + x)$ i $k = f(h+x) - f(x)$. Stosując B do obu stron równości:

$$k = f(x+h) - f(x) = Df(x)h + r(k), \quad \text{gdzie} \quad \frac{||r(h)||}{||h||} \longrightarrow_{||h|| \to 0} 0$$

dostajemy $Bk = h + Br(h)$, czyli $\overbrace{g(y+k) - g(y)}^{=h} = Bk - B(r(h))$.

Z (4) $2\lambda\|h\| \leqslant \|k\|$. Zatem $h \to 0$ jesli $k \to 0$ (co dowodzi ciaglosci g w punkcie y) oraz

$$\frac{\|B(r(h))\|}{||k||} \leqslant \frac{|||B|||}{2\lambda} \cdot \frac{\|r(h)\|}{||h||} \to 0 \quad \text{gdy} \quad k \to 0.$$

Zatem g jest różniczkowalna w y i $Dg(y) = B$. Innymi słowy

$$Dg(y) = \{Df(g(y))\}^{-1}, y \in V$$

Ponieważ $g\colon V \to U$ ciągłe, $Df\colon U \to \Omega$ ciągłe i $A \mapsto A^{-1}$ jest ciągłe jako odwzorowanie $\Omega \to \Omega$, to $Dg(y)$ jest ciągłe. $\square$

4.2. **Dyfeomorfizmy.**

Definicja 11. Odwzorowanie $\varphi\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nazywamy *dyfeomorfizmem*, jeśli:

(1) φ jest klasy C^1, jest różnowartościowe i $Df(a)$ jest nieosobliwa dla każdego $a \in G$
(2) φ^{-1} jest ciągłe.

Mówimy wówczas, że zbiory G i $\varphi(G)$ są *dyfeomorficzne*.

Wniosek 3.

(1) Jeśli φ jest dyfeomorfizmem, to $m \geqslant n$.
(2) Jeśli φ jest dyfeomorfizmem, to φ jest homeomorfizmem G i $\varphi(G)$.
(3) Odwzorowanie $\varphi\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest dyfeomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest klasy C^1, różnowartościowe i nieosobliwe ($Df(a)$ nieosobliwa $\forall_{a\in G}$).

Przykład 7 (Dyfeomorfizm biegunowy). Niech $f\colon G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, G = \{(r,\alpha)\colon r > 0, -\pi < \alpha < \pi\}$ i $f(r,\alpha) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$. Zauważmy, że f jest klasy C^1, różnowartościowe i nieosobliwe, bo:

$$J\varphi = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{vmatrix} = r\cos^2\alpha + r\sin^2\alpha = r \neq 0.$$

Zbiory G i $f(G) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\colon x \leqslant 0\}$ sa dyfeomorficzne. $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha$ dla $x > 0$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$, $\varphi^{-1}(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x})$.