5.1. **Płat k-wymiarowy.**

Definicja 12. Zbiór $S \subset \mathbb{R}^m$ nazywamy *płatem k-wymiarowym*, jeśli istnieje dyfeomorfizm $\varphi\colon G \overset{\text{otw}}{\subset} \mathbb{R}^k \xrightarrow[\text{na}]{\text{1-1}} S$. Dyfeomorfizm φ nazywamy wówczas *przedstawieniem parametrycznym* płata S. Płat 1-wymiarowy będziemy nazywali *łukiem otwartym*.

Uwaga 10. Z nieosobliwości φ, wynika że $k \leqslant m$.

Przykład 8.

(1) $G \overset{\text{otw.}}{\subset} \mathbb{R}^k$ jest płatem k-wymiarowym. Wystarczy wziąć $\varphi(x) = x$.
(2) Niech f – klasy C^1 określona na $G \overset{\text{otw}}{\subset} \mathbb{R}^k$. Wykres funkcji f, czyli zbiór $S = \{(x, f(x))\colon x \in G\} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{k+1}$ jest płatem k-wymiarowym. Dyfeomorfizm $\varphi\colon G \xrightarrow[\text{na}]{\text{1-1}} S$ jest dany wzorem $\varphi(x) = (x, f(x))$. Jest to odwzorowanie klasy C^1, $\varphi^{-1}(x, f(x)) = x$ jest rzutowaniem na $\mathbb{R}^k$, więc jest ciągłe.
(3) Niech $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 = 1\} \setminus \{(-1, 0)\}$ (okrąg bez punktu). Wówczas S jest łukiem otwartym (płatem 1-wymiarowym). Dyfeomorfizm $\varphi\colon (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$ jest dany wzorem $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$. Zatem w tym przypadku $G = (-\pi, \pi)$, $\varphi(G) = S$, $\varphi\colon G \xrightarrow[\text{na}]{\text{1-1}} S$. Zauważmy, że $t = \phi^{-1}(x, y)$ jest argumentem głównym liczby $z = x + iy$, więc jest ciągły.

5.2. **Rozmaitość k-wymiarowa.**

Definicja 13. $S \subset \mathbb{R}^m$ nazywamy *rozmaitością k-wymiarową* (klasy C^1) jeśli jest on sumą pewnej rodziny płatów k-wymiarowych będących zbiorami otwartymi względem S, tzn.

$$S = \bigcup_{j \in J} S_j, \quad \text{gdzie } S_j \text{ – płat } k\text{-wymiarowy}, \quad S_j \overset{\text{otw.}}{\subset} S.$$

Mapą rozmaitości k-wymiarowej S nazywamy każdą parę (φ, G), gdzie $G \overset{\text{otw.}}{\subset} \mathbb{R}^k$, $\varphi\colon G \xrightarrow{\text{dyfeo}} \varphi(G) \overset{\text{otw.}}{\subset} S$.

Definicja 14. *Atlasem* na rozmaitości S nazywamy rodzinę map (φ_j, G_j) taką, że:

(1) $S = \bigcup_j \varphi_j(G_j)$.
(2) Jeśli (φ_1, G_1) i (φ_2, G_2) są dwiema mapami tego atlasu, to odwzorowanie

$$\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2\colon \varphi_2^{-1}(\varphi_1(G_1) \cap \varphi_2(G_2)) \to \varphi_1^{-1}(\varphi_1(G_1) \cap \varphi_2(G_2))$$

jest dyfeomorfizmem.

Przykład 9. Niech $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ i weźmy:

$$G_1 = (-\pi, \pi), \qquad \varphi_1(t) = (\cos t, \sin t) \quad \text{dla} \quad t \in G_1$$
$$G_2 = (0, 2\pi), \qquad \varphi_2(t) = (\cos t, \sin t) \quad \text{dla} \quad t \in G_2$$

oraz $S_1 = \varphi_1(G_1) = S \setminus \{(-1, 0)\}$ i $S_2 = \varphi_2(G_2) = S \setminus \{(1, 0)\}$.

Wówczas $S = S_1 \cup S_2$ jest rozmaitością 1-wymiarową, zaś (φ_1, G_1), (φ_2, G_2) jest atlasem tej rozmaitości.

5.3. **Wektory styczne.**

Definicja 15. $s \in \mathbb{R}^m$ nazywamy wektorem *stycznym* do zbioru $S \subset \mathbb{R}^m$ w punkcie $x \in S$ jeśli istnieje ciąg $\{x_n\},\ x_n \in S$, zbieżny do x oraz ciąg liczb rzeczywistych $\{a_n\}$ taki, że

$$s = \lim_{n\to\infty} a_n(x_n - x).$$

Jeżeli dodatkowo:

- $a_n > 0$, to s jest wektorem *stycznym wewnętrznie*,
- $a_n < 0$, to s jest wektorem *stycznym zewnętrznie*.

Uwaga 11. Niech

- $T(x, S)$ – zbiór wszystkich wektorów stycznych,
- $T_w(x, S)$ – zbiór wektorów stycznych wewnętrznie,
- $T_z(x, S)$ – zbiór wektorów stycznych zewnętrznie.

Wówczas zachodzą relacje: $T(x, S) = T_w(x, S) \cup T_z(x, S)$ i $T_z(x, S) = -T_w(x, S)$.

Twierdzenie 11. *Niech $S \subset \mathbb{R}^m$ będzie k-wymiarową rozmaitością oraz $x_0 \in S$. Wówczas $T(x_0, S) = T_w(x_0, S) = T_z(x_0, S)$ oraz zbiory te stanowią podprzestrzeń liniową k-wymiarową przestrzeni $\mathbb{R}^m$. Przy czym jeśli (φ, G) jest mapą rozmaitości S obejmującą punkt x_0 (tzn $x_0 \in \varphi(G)$), $x_0 = \varphi(t_0)$, to*

$$T(x_0, s) = D\varphi(t_0)\mathbb{R}^k = \{D\varphi(t_0)h\colon\ h \in \mathbb{R}^k\}.$$

Zatem przestrzeń $T(x_0, S)$ jest rozpięta na wektorach $D_1\varphi(t_0), \ldots, D_k\varphi(t_0)$.
Dowód:

Wystarczy dowieść zawierania:

$$T(x_0, S) \overset{2)}{\subseteq} D\varphi(t_0)\mathbb{R}^k \overset{1)}{\subseteq} T_w(x_0, S).$$

Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć $x_0 = 0, t_0 = 0, A = D\varphi(0)$ i mapą jest (G, φ). Ponieważ φ jest różniczkowalna w $t_0 = 0$, to:

$$\varphi(t) = At + \|t\|r(t), \quad \text{gdzie } r(t) \text{ jest ciągłe w } 0 \text{ i } r(0) = 0. \tag{5}$$

1) $A\mathbb{R}^k \subseteq T_w(0, S)$

Niech $h \in \mathbb{R}^k$. Wykażemy, że $Ah \in T_w(0, S)$. Ustalmy w tym celu ciąg (b_n), $b_n \to 0^+$, $b_nh \in G$ $\forall_{n\in\mathbb{N}}$. Wówczas $\varphi(b_nh) = Ab_nh + b_n\|h\|r(b_nh)$, a zatem przyjmując $x_n = \varphi(b_nh)$ i $a_n = \frac{1}{b_n}$ mamy $a_n > 0$, $x_n \in S$, $x_n \to 0$ (bo $b_nh \to 0$) oraz

$$a_nx_n = \frac{1}{b_n}\varphi(b_nh) \overset{(5)}{=} Ah + \|h\|r(b_nh) \xrightarrow[n\to\infty]{} Ah.$$

Z definicji wektora stycznego wewnętrznie oznacza to, że $Ah \in T_w(0, S)$.

2) $T(0, S) \subseteq A\mathbb{R}^k$

Weźmy $s \in T(0, S)$. Pokażemy, że $s = Ah$ dla pewnego $h \in \mathbb{R}^k$. Ponieważ $s \in T(0, S)$, to istnieje ciąg $\{x_n\}, x_n \in S, x_n \to 0$ i ciąg $\{a_n\}, a_n \in \mathbb{R}$, takie że $a_nx_n \to s$ przy $n \to \infty$. Ponieważ $\varphi(G) \overset{\text{otw.}}{\subset} S$ to $\exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0}\ x_n \in \varphi(G)$, czyli $\varphi^{-1}(x_n) \in G$. Ponieważ φ – dyfeomorfizm, to $\varphi^{-1}(x_n) \to 0$, bo $x_n \to 0$, $\varphi^{-1}(0) = 0$ i φ^{-1} – ciągłe.

Podstawiając do wzoru (5) dostajemy:

$$x_n = A\varphi^{-1}(x_n) + \|\varphi^{-1}(x_n)\|r(\varphi^{-1}(x_n)).$$

Zatem

$$a_nx_n = Aa_n\varphi^{-1}(x_n) + a_n\|\varphi^{-1}(x_n)\|r(\varphi^{-1}(x_n)).$$

Oznaczmy $h_n = a_n\varphi^{-1}(x_n)$, $r_n = \operatorname{sgn} a_n r(\varphi^{-1}(x_n))$, $r_n \to 0$, gdzie

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad x > 0 \\ 0 & \text{gdy} \quad x = 0 \\ -1 & \text{gdy} \quad x < 1. \end{cases}$$

Wtedy

$$a_n x_n = Ah_n + \|h_n\| r_n \to s. \tag{6}$$

Wystarczy pokazać, że h_n jest ciągiem zbieżnym: $A \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$, $k = \operatorname{rank} A$, Ponieważ $A(\mathbb{R}^k) = \mathbb{R}^k$, to A daje się odwrócić na tym kawałku i dostajemy wówczas $A^{-1} \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$. Rozszerzamy A^{-1} do $B \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ (tzn. $B|_{\mathbb{R}^k} = A^{-1}$ i $B \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$.

Podstawiając $x = At$ w nierówności $\|Bx\| \leqslant |||B||| \cdot \|x\|$ dostajemy $\underbrace{\|BAt\|}_{=t} \leqslant |||B||| \cdot \|At\|$, czyli $\|At\| \geqslant \frac{1}{|||B|||} \cdot \|t\|$. Wracając do (6) dostajemy

$$\|2s\| \geqslant \Big| Ah_n + \underbrace{\|h_n\|] \cdot r_n}_{\text{bo } \to |S|} \Big| \geqslant \Big| \|Ah_n\| - \|h_n\| \cdot \|r_n\| \Big| \geqslant (\frac{1}{|||B|||} - \|r_n\|) \cdot \|h_n\| \geqslant \frac{1}{2|||B|||} \|h_n\|.$$

Zatem h_n jest ograniczony, czyli $Ah_n \to s$.

Z nierówności

$$\frac{1}{|||B|||} \cdot \|h_n - h_l\| \leqslant \|A(h_n - h_l)\| = \|\underbrace{Ah_n}_{\to s} - \underbrace{Ah_l}_{\to s}\| \xrightarrow[\text{dla } n,l \to \infty]{} 0.$$

Stąd h_n ciąg Cauchy'ego ($\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{m,n > N} \|h_m - h_n\| < \varepsilon$), czyli $h_n \to h$ przy $n \to \infty$. Oznacza to, że $s = Ah$, a zatem $T(0, S) \subseteq A\mathbb{R}^k$. □

Przykład 10. Niech $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|\}$. Pokażemy, że $T_w(0, S) = S$. W tym celu weźmy $p \in S$, wówczas $p = \lim_{n\to\infty} n(\frac{p}{n} - 0)$, czyli $p \in T_w(0, S)$. Niech teraz $s \in T_w(0, S)$. Wówczas $s = \lim_{n\to\infty} a_n p_n$, gdzie $a_n \geqslant 0$ i $p_n \in S$. Ponieważ $a_n, p_n \in S$ i S – domknięte, to $\lim_{n\to\infty} a_n p_n = s \in S$, $T_z(0, S) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -|x|\}$ oraz $T(0, S) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| = |x|\}$.

Zatem S nie jest rozmaitością.