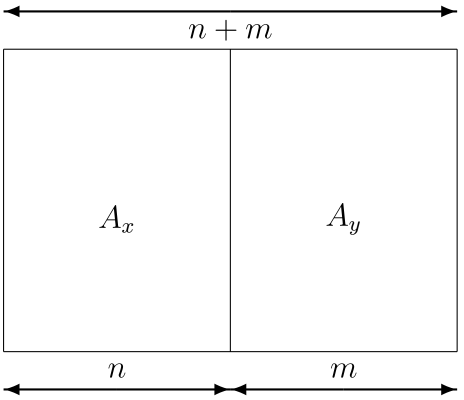
6. Wykład. Twierdzenie o funkcji uwikłanej (TFU)

Niech $A \in L(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^n)$ i niech $A_x \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ i $A_y \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ będą zdefiniowane przez wzór: jeśli $h \in \mathbb{R}^n$ i $k \in \mathbb{R}^m$ to $A(h,k) = A_x h + A_y k$, gdzie $A_x h = A(h,0)$, $A_y k = A(0,k)$.



$x = (x_1, \ldots, x_n)$
$y = (y_1, \ldots, y_m)$

A

Twierdzenie 12 (o funkcji uwikłanej)**.** *Niech $f\colon E \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ klasy C^1 takie, że $f(a,b) = 0$ dla pewnego $(a,b) \in E$, $A = Df(a,b)$ i niech A_x będzie odwracalne. Wtedy istnieją zbiory otwarte $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ i $W \subseteq \mathbb{R}^m$ takie, że $(a,b) \in U$ i $b \in W$ oraz*

i) $\forall y \in W$ istnieje dokładnie jeden x taki, że $(x,y) \in U$ i $f(x,y) = 0$.
ii) Jeśli x jest zdefiniowany jako $x = g(y)$ to g jest odwzorowaniem klasy C^1 zbioru W w $\mathbb{R}^n$, $g(b) = a$, $f(g(y),y) = 0$, $Dg(b) = -A_x^{-1}A_y$.

Uwaga 12. Jak należy rozumieć to twierdzenie?

$$n \text{ równań} \begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) = 0 \end{cases} \quad \underset{\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n} \text{ nieosob.}}{\overset{\text{TFU}}{\Longrightarrow}} \quad \begin{cases} x_1 = g_1(y_1,\ldots,y_m) \\ \vdots \\ x_n = g_1(y_1,\ldots,y_m) \end{cases}.$$

Jeżeli są spełnione założenia TFU, to można układ ten rozwikłać ze względu na x.

Dowód: Niech $F(x,y) := (f(x,y),y)$, $F\colon E \to \mathbb{R}^{n+m}$, F klasy C_1, bo f klasy C^1 i Id klasy C^1. Będziemy chcieli zastosować twierdzenie o funkcji odwrotnej dla fukcji F w punkcie (a,b). Pokażemy, że $Df(a,b)$ jest macierzą odwracalną.

Ponieważ

$$f(a,b) = 0 \text{ to } \quad f(a+h, b+k) = A(h,k) + r(h,k).$$

Zatem

$$\begin{aligned} F(a+h,b+k) - F(a,b) &= (f(a+h,b+k), b+k) - (0,b) = (f(a+h,b+k),k) \\ &= (A(h,k),k) + (r(h,k),0), \end{aligned}$$

gdzie $(A(h,k),k)$ jest odwzorowaniem liniowym i $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\|(r(h,k),0)\|}{\|(h,k)\|} = 0$.

Zatem $DF(a,b)\colon (h,k) \mapsto (A(h,k),k)$. Żeby pokazać nieosobliwość tej macierzy wystarczy pokazać, że zero jest obszarem tylko zera (tzn. ker $DF(a,b) = \{0\}$)

$$(A(h,k),k) = 0, \quad A(h,k) = 0, \quad k = 0.$$

$$\begin{cases} A(h,k) = A_x h + A_y k = 0 \\ k = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow A_x h = 0 \Rightarrow h = 0 \text{ (bo } A_x \text{ odwracalne).}$$

Zatem $Df(a,b)$ jest różnowartościowe $\Rightarrow Df(a,b)$ jest na $\mathbb{R}^{n+m}$, $Df(a,b)$ jest odwracalna, $F(x,y) = (f(x,y),y)$. Z twierdzenia o funkcji odwrotnej dla $F(x,y)$ isnieją $U, V \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ takie, że $(a,b) \in U$, $(0,b) \in V$, $F\colon U \xrightarrow[na]{1-1} V$.

Niech $W = \{y \in \mathbb{R}^m\colon (0,y) \in V\}$. Wówczas: 1) $b \in W$, 2) $W \subseteq R^m$ otwarty, bo V – otwarty i W – rzut zbioru otwartego V na podprzestrzeń.

Pokażemy, że zachodzą i) i ii).

i) Niech $y \in W$. Wówczas $(0,y) \in V$, $(0,y) = F(x,y)$, $(x,y) \in U$ (z tw. o funkcji odwrotnej). Z konstrukcji F mamy, że $0 = f(x,y)$. Pokażemy, że $\forall y \in W$ jest tylko jedno x, że $(x,y) \in U$ i $f(x,y) = 0$.

Przypuśćmy bowiem, że $\begin{cases} (x,y) \in U & \text{i} \quad f(x,y) = 0 \\ (x',y) \in U & \text{i} \quad f(x',y) = 0. \end{cases}$

Wówczas

$$F(x',y) = (f(x',y),y) = (0,y) = (f(x,y),y) = F(x,y),$$

czyli istnieją dwa punkty w U dla których F ma tę samą wartość, ale F jest różnowartościowa na U. Zatem jeśli $f(x,y) = f(x',y)$ to $x = x'$.

ii) Niech g będzie taka, że $x = g(y)$. Zauważmy, że g określone dla każdego $y \in W$, $(g(y),y) \in W$, $f(g(y),y) = 0$ i $g(b) = a$. Stąd $F(g(y),y) = (0,y)$.

Niech $G = F^{-1}$, $G\colon V \to U$, G – klasy C^1 (z tw. o funkcji odwrotnej). Ponieważ $G(0,y) = (g(y),y)$ i G klasy C^1, to również g klasy C^1. Zdefiniujmy $\Phi(y) := (g(y),y)$. Wówczas $D\Phi(y)(h,k) = (Dg(y)h,k)$. Z drugiej strony $f(\Phi(y)) = 0$, czyli $D(f\Phi(y)) = Df(\Phi(y)) \circ D\Phi(y) = 0$. Jeśli $y = b$, to $\Phi(y) = (g(b),b) = (a,b)$, więc $Df(\Phi(y)) = Df(a,b) = A$ (z założenia). Zatem mamy $A \circ D\Phi(b) = 0$, czyli $A \circ D\Phi(b) = A_x Dg(b) + A_y I = 0$.

$$\begin{bmatrix} A_x & A_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_g \\ I \end{bmatrix} \qquad D_g(b) = -A_x^{-1} * A_y$$

$\square$

Uwaga 13.

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{układ rozwikłujemy względem } x]{(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}{}_{ij}) \text{ nieosobliwa}} \text{(TFU)} \begin{cases} x_1 = g_1(y_1,\ldots,y_m) \\ \vdots \\ x_n = g_1(y_1,\ldots,y_m). \end{cases}$$

Stąd mamy

$$\begin{cases} f_1(g_1(\ldots),\ldots,g_n(\ldots),y_1,\ldots,y_m) = 0 & : \frac{\partial}{\partial y_k} \qquad (k = 1,\ldots,m) \\ \vdots \\ f_n(g_1(\ldots),\ldots,g_n(\ldots),y_1,\ldots,y_m) = 0 & : \frac{\partial}{\partial y_k}. \end{cases}$$

Zatem
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{\partial g_j}{\partial y_k} = -\frac{\partial f_i}{\partial y_k} \quad i = 1, ..., n, \ k = 1, ..., m$$
z niewiadomymi $\frac{\partial g_j}{\partial y_k}$, czyli dostaliśmy układ $n + m$ równań z niewiadomymi $(\frac{\partial g_j}{\partial y_k})$ ($j = 1, \ldots, n$, $k = 1, ..., m$)

Przykład 11 (TFU dla $n = m = 1$). Niech $f \colon E(otw) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ klasy C^1, $f(a,b) = 0$ dla pewnego $(a,b) \in E$ i $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \neq 0$. Wówczas istnieje $W(otw) \subset \mathbb{R}$, $b \in W$ i $g \colon W \to \mathbb{R}$ klasy C^1 takie, że $g(b) = a$, $f(g(y), y) = 0$ i $g^{'}(b) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}$, bo jesli $f(g(y), y) = 0$, to $\frac{d}{dy} f(g(y), y) = \frac{\partial f}{\partial x} g^{'} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, a zatem $g^{'}(y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}$.