7.1. **Rozmaitości o równaniu** $F(x) = 0$**.**

Definicja 16. Jeżeli $M \subset \mathbb{R}^n$ jest dowolną rozmaitością k-wymiarową, to *wektorem normalnym* do M w punkcie $x_0 \in M$ nazywamy taki element $\bar{n} \in \mathbb{R}^n$, który jest prostopadły do $T(x_0, M)$ (tzn. $\bar{n}s = 0 \quad \forall s \in T(x_0, M)$). Zbiór wszystkich wektorów normalnych do M w punkcie x_0 będziemy oznaczać przez $N(x_0, M)$. Jest to podprzestrzeń $(n-k)$-wymiarowa w $\mathbb{R}^n$ oraz $\mathbb{R}^n$ jest sumą prostą podprzestrzeni $T(x_0, M)$ i $N(x_0, M)$.

Twierdzenie 13. *Niech* $F\colon E \overset{otw}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *klasy* C^1 *i* $m < n$*,* $M = \{x \in E\colon F(x) = 0\}$ *oraz rank* $DF(x) = m$ *dla każdego* $x \in M$*. Wówczas:*

(1) M *jest rozmaitością* k*-wymiarową,* $k = n - m$*.*
(2) Jeśli $x_0 \in M$ *to* $T(x_0, M) = \ker DF(x) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon DF(x_0)x = 0\}$ *i* $N(x_0, M) =$ *span* $\{\operatorname{grad} F_i(x_0), \quad i = 1, \ldots, m\}$*.*

Dowód:

1) Niech $x_0 \in M$ oraz rank $DF(x_0) = m$. Niech dalej $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (x_1, \ldots, x_m)$ oraz $z = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$. Wówczas $F(x) = F(y, z)$. Dalej, ponieważ rank $DF(x) = m$, możemy przyjąć, że $DF(x_0) = A_y + A_z$, gdzie A_y – nieosobliwa.

$$x_0 = (y_0, z_0) \in M \Rightarrow F(x_0) = F(y_0, x_0) = 0$$

Korzystając z twierdzenia 12 (o funkcji uwikłanej), dostajemy że istnieją zbiory otwarte $W \subset \mathbb{R}^{n-m}$ i $U \subset \mathbb{R}^n$ takie, że dla każdego $z \in W$ istnieje dokładnie jeden y, że $(y, z) \in U$ i $F(y, z) = 0$, czyli istnieje $g\colon W \to \mathbb{R}^m$ klasy C^1 taka, że $y = g(z)$, $y_0 = g(z_0)$ oraz $F(g(z), z) = 0$. Niech $\varphi(z) = (g(z), z)$. Wówczas (W, φ) jest mapą:

$$\varphi(z_0) = x_0, \quad \varphi(z) = x \quad \text{i} \quad F(g(z), z) = 0,$$

więc $x \in M$. Zatem $\varphi(W) \overset{\text{otw.}}{\subset} M$ i φ – dyfeomorfizm, więc (W, φ) jest dobrze zdefiniowaną mapą. Jeśli $\varphi(W) = M_{x_0}$, to z dowolności wyboru $x_0 \in M$ dostajemy, że

$$M = \bigcup_{x_0 \in M} M_{x_0} \quad \text{i} \quad M_{x_0} \overset{\text{otw.}}{\subset} M.$$

Zatem M jest rozmaitością wymiaru $n - m = k$.

2) Niech (W, φ) – mapa taka, że $\varphi(z_0) = x_0$ dla pewnego $z_0 \in W$. Dla każdego $z \in W$ zachodzi $F(\varphi(z)) = (F \circ \varphi)(z) = 0$. Stąd $D(F \circ \varphi) = 0$, czyli $DF \circ D\varphi = 0$. W szczególności $DF(x_0) \circ D\varphi(z_0) = 0$, $DF(x_0) = A$, $A \circ D\varphi(z_0) = 0$, czyli $A(D\varphi(z_0)h) = 0$ dla $h \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Z twierdzenia 11

$$s \in T(x_0, M) \iff s = D\varphi(z_0)h \quad \text{dla pewnego} \quad h \in \mathbb{R}^{n-m}.$$

Zatem $As = 0$ dla $s \in T(x_0, M)$. Wobec tego $T(x_0) \subset \ker A$. Ponieważ $\dim \ker A = n - m$ i jednocześnie $\dim T(x_0, M) = n - m$, to musi być $T(x_0, M) = \ker A = \ker DF(x_0)$.

Ponieważ

$$\forall s \in T(x_0, M) \quad DF_i(x_0)s = 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, m,$$

gdzie $DF_i(x_0) = \operatorname{grad} F_i(x_0) \quad (i = 1, \ldots, m)$ są liniowo niezależne (bo rank $DF(x_0) = m$). Zatem $N(x_0, M) = \text{span}\,\{\operatorname{grad} F_i(x_0), \quad i = 1, \ldots, m\}$. $\square$

Uwaga 14. Nie każda rozmaitość daje się zapisać w postaci $\{x \colon F(x) = 0\}$, np. dla wstęgi Möbiusa nie da się tak zrobić.

Przypuśćmy, że tak jest, czyli istnieje $F \colon G \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ takie, że $M = \{x \in G \colon F(x) = 0\}$ i $\operatorname{rank} DF(x) = 1$, tzn $\forall x \in S$ $\operatorname{grad} F(x) \neq 0$. Wówczas istniałoby odwzorowanie $\bar{n} \colon M \to \mathbb{R}^3$ takie, że $\forall x \in M$ $\bar{n}(x)$ – wersor normalny do M w x, przedstawione w postaci:

$$\bar{n} \colon x \mapsto \frac{\operatorname{grad} F(x)}{||\operatorname{grad} F(x)||}$$

Jest to niemożliwe, bo po obiegu wstęgi wersor musiałby przyjąć przeciwny zwrot, czyli $\bar{n}(x_0) = -\bar{n}(x_0)$ – sprzeczność.

7.2. **Ekstrema funkcji na rozmaitościach o równaniu** $F(x) = 0$.

Twierdzenie 14 (Lagrange'a o mnożnikach)**.** *Niech* $F \colon E \overset{otw.}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *klasy* C^1*,* $m < n$*,* $M = \{x \in E \colon F(x) = 0\}$ *oraz* $\operatorname{rank} DF(x) = m$ $\forall x \in M$ *i* $f \colon E \to \mathbb{R}$*. Jeśli funkcja* $f_{|M}$ *przyjmuje ekstremum lokalne w punkcie* $x_0 \in M$ *i* f *jest różniczkowalna w tym punkcie, to istnieje forma liniowa* $\Lambda \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ *taka, że* x_0 *jest punktem stacjonarnym funkcji* $g = f - \Lambda \circ F$ *(funkcji Lagrange'a), czyli* $Dg(x_0) = 0$ *(*$D_j g(x_0) = 0$ *dla* $j = 1, \ldots, n$*).*

Jak korzystając z twierdzenia znaleźć x_0?

Mamy $\Lambda \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\Lambda y = \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i$, gdzie $\lambda_i \in \mathbb{R}$ jest nazywane *mnożnikiem Lagrange'a*. Zatem $g = f - \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i$. Wówczas

$$Dg(x_0) = 0 \iff Df(x_0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i DF_i(x_0) \iff D_j f(x_0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i D_j F(x_0).$$

Zatem dostajemy $n + m$ równań z niewiadomymi $x_{01}, \ldots, x_{0n}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$:

$$n + m \text{ równań} \begin{cases} D_1 f(x_0) = \lambda_1 D_1 F_1(x_0) + \ldots + \lambda_m D_1 F_m(x_0) \\ \vdots \\ D_n f(x_0) = \lambda_1 D_n F_1(x_0) + \ldots + \lambda_m D_1 F_m(x_0) \\ \\ F_1(x_0) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_0) = 0 \end{cases}$$

Dowód twierdzenia:

Mamy: $Dg(x_0) = Df(x_0) - \Lambda \circ Df(x_0)$ i oznaczamy $A = DF(x_0)$, $B = Df(x_0)$.

Zatem musimy wykazać istnienie takiej formy liniowej $\Lambda \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, że

$$Df(x_0) \overset{?}{=} \Lambda \circ Df(x_0) \quad \text{lub inaczej} \quad B \overset{?}{=} \Lambda \circ A \quad \text{czyli, że} \quad \Lambda(Ah) \overset{?}{=} Bh \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

W tym celu weźmy dowolny wektor $h \in \mathbb{R}^n$, wówczas mamy Bh i niech $y = Ah$. Określmy formę Λ jako $\Lambda(y) = Bh$. Sprawdzamy poprawność tej definicji. Forma jest jednoznacznie określona jeśli zachodzi implikacja

$$Ah_1 = Ah_2 \Rightarrow Bh_1 = Bh_2,$$

co jest równoważne implikacji

$$Ah = 0 \Rightarrow Bh = 0, \quad \text{czyli} \quad \ker A \subset \ker B.$$

Z twierdzenia 13 mamy, że $\ker A = \ker Df(x_0) = T(x_0, M)$, zatem wystarczy wykazać, że $T(x_0, M) \subset \ker B$.

Niech (W, φ) mapa na rozmaitości M obejmująca x_0 (tzn. $x_0 = \varphi(t_0)$, $t_0 \in W$). Załóżmy, że $f_{|M}$ przyjmuje lokalne ekstremum (np maksimum) w punkcie x_0, tzn. istnieje $U \ni x_0$ takie, że $f_{|M}(x) \leqslant$

$f_{|M}(x_0)$ dla każdego $x \in U \cap M$. Z ciągłości φ istnieje $V \ni t_0$ takie, że $V \subset W$ i $\varphi(V) \subset U$. Mamy więc

$$f(\varphi(t)) \leqslant f(\varphi(t_0)) \quad \forall t \in V,$$

czyli $f \circ \varphi$ przyjmuje w t_0 maksimum lokalne.

Z twierdzenia 6 (o warunku koniecznym istnienia ekstremum) mamy: $D(f \circ \varphi)(t_0) = Df(x_0) \circ D\varphi(t_0) = 0$, czyli $B \circ D\varphi(t_0) = 0$, to znaczy $B(D\varphi(t_0)h) = 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$. Z drugiej strony z twierdzenia 11 $Bs = 0 \quad \forall s \in T(x_0, M)$, a to oznacza, że $T(x_0, M) \subset \ker B$ i Λ jest poprawnie zdefiniowane.

Czy Λ jest określone na całym $\mathbb{R}^m$?

$F\colon E \overset{\text{otw.}}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\Lambda\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $y = Ah$ i $h \in \mathbb{R}^n$. Ponieważ rank $A = m$, to $A\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m$, więc Λ jest określone na całym $\mathbb{R}^m$. Liniowość Λ jest oczywista. $\square$

Przykład 12. $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $f(x, y, z) = xyz$.

$$\max_M f = ? \quad \min_M f = ?$$

Rozwiązanie:

$$F(x, y, z) = (x + y + z - 1, x^2 + y^2 + z^2 - 1), \quad F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,$$
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon F(x, y, z) = 0\}.$$

Funkcja Lagrange'a:

$$g(x, y, z) = f(x, y, z) - \Lambda \circ F(x, y, z) = xyz - \lambda_1(x + y + z - 1) - \lambda_2(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Dostajemy układ 5 równań na $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$:

$$\begin{cases} yz = \lambda_1 + 2x\lambda_2 \\ xz = \lambda_1 + 2y\lambda_2 \\ xy = \lambda_1 + 2z\lambda_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie układu równań ma postać:

$$\left.\begin{matrix} (1, 0, 0) \\ (0, 1, 0) \\ (0, 0, 1) \end{matrix}\right\} A_{1/2/3}, \qquad \left.\begin{matrix} (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) \\ (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \end{matrix}\right\} B_{1/2/3}.$$

$f(A) = 0$ – maksimum i $f(B) = -\frac{4}{27}$ – minimum (bo M – zwarty).