9.1. **Ekstrema funkcji wielu zmiennych.**

Definicja 21. Każde przekształcenie dwuliniowe $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ można przedstawić w postaci $F(h,h') = Ahh' = \langle Ah, h'\rangle$, gdzie A – macierz kwadratowa $n \times n$. Takie przekształcenie dwuliniowe nazywamy *formą kwadratową* (2-*liniową*). Podobnie definiujemy formy m-liniowe.

Definicja 22. Mówimy, że forma m-liniowa $A \in L_m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ jest:

- *dodatnio określona* jeśli $Ah^m > 0 \quad \underset{\substack{h\in\mathbb{R}^n\\ h\neq 0}}{\forall}$.
- *ujemnie określona* jeśli $Ah^m < 0 \quad \underset{\substack{h\in\mathbb{R}^n\\ h\neq 0}}{\forall}$.
- *nieokreślona* jeśli $\underset{h_1,h_2\in\mathbb{R}^n}{\exists}$ takie, że $Ah_1^m > 0$ i $Ah_2^m < 0$.

Uwaga 15. Z powyższej definicji wynika, że forma m-liniowa może być dodatnio albo ujemnie określona jedynie w przypadku, gdy m-parzyste.

Jak zbadać czy forma kwadratowa jest dodatnio (ujemnie) określona?

Stwierdzenie 2. *A jest dodatnio (ujemnie) określona $\Leftrightarrow$ A jest macierzą symetryczną i ma wszystkie wartości własne dodatnie (ujemne).*

Stwierdzenie 3 (Kryterium Sylvestera)**.** *Niech* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. *Forma kwadratowa* $h \mapsto hAh$ *jest:*

a) dodatnio określona $\Leftrightarrow$ $\mathit{det}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} \\ \vdots & & \\ a_{l1} & \dots & a_{ll} \end{pmatrix} > 0$ *dla* $l = 1, \dots, n$.

b) ujemnie określona $\Leftrightarrow$ $(-1)^l \mathit{det}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} \\ \vdots & & \\ a_{l1} & \dots & a_{ll} \end{pmatrix} > 0$ *dla* $l = 1, \dots, n$.

Twierdzenie 19 (Lokalny wzór Taylora 2-go rzędu)**.** *Jeśli $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalne w $x_0 \in G$, to zachodzi wzór*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)h + \frac{1}{2}D^2 f(x_0)h^2 + \|h\|^2\psi(h),$$

gdzie $\psi(0) = C$, ψ ciągłe w zerze.
Dowód:

Możemy przyjąć $x_0 = 0$. Biorąc

$$g(x) = f(x) - f(0) - Df(0)x - \frac{1}{2}D^2 f(0)x^2$$

mamy $g(0) = 0$, $Dg(0) = 0$, $D^2g(0) = 0$. Oznaczmy $\psi(h) = \frac{1}{\|h\|^2}g(h)$ dla $h \neq 0$ i $\psi(0) = 0$. Wystarczy wykazać, że ψ jest ciągłe w 0.

Wiemy, że g różniczkowalne na pewnej kuli $\{x\colon \|x\| < r\} \subset G$ dla pewnego $r > 0$. Również $D_i g$ są różniczkowalne w zerze i $D(D_i g)(0) = 0$. Zatem

$$\lim_{x\to 0} \frac{D_i g(x)}{\|x\|} = 0,$$

czyli dla danego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ ($\delta \leqslant r$), że dla $\|x\| \leqslant \delta$ zachodzi $|D_i g(x)| \leqslant \varepsilon\|x\|$ ($i = 1, \ldots, k$), a stąd $\|Dg(x)\| \leqslant \varepsilon\sqrt{n}\|x\|$ dla $\|x\| \leqslant \delta$. Jeśli $\|h\| \leqslant \delta$ i $x \in [0, h]$, to $\|x\| \leqslant \|h\|$, czyli $\|Dg(x)\| \leqslant \varepsilon\sqrt{n}\|h\|$, a zatem z Twierdzenia 9 (o wartości średniej dla odwzorowań) $\|g(x)\| \leqslant \varepsilon\sqrt{n}\|h\|^2$. To oznacza, że $\|\psi(h)\| \leqslant \varepsilon\sqrt{n}$, co oznacza ciągłość ψ w zerze. □

Twierdzenie 20. *Niech $f\colon G \overset{otw.}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dwukrotnie różniczkowalna w $x_0 \in G$ i $Df(x_0) = 0$. Wówczas jeśli forma kwadratowa $h \mapsto D^2f(x_0)hh$ jest dodatnio (ujemnie) określona, to f przyjmuje w x_0 minimum (maksimum) lokalne. Jeśli forma kwadratowa jest nieokreślona, to f nie przyjmuje w x_0 ekstremum lokalnego.*

Dowód: Oznaczmy $2F(h) = D^2f(x_0)hh$. Wówczas z lokalnego wzoru Taylora $f(x_0+h) - f(x_0) = F(h) + h^2\psi(h)$. Załóżmy, że forma kwadratowa jest dodatnio określona, czyli $F(h) \geqslant Mh^2 \quad \underset{h\in\mathbb{R}^n}{\forall}$. Ponieważ $\psi(h) \to 0$ przy $h \to 0$, to istnieje $\delta \geqslant 0$, że jeśli $\|h\| < \delta$, to $x_0 + h \in G$ i $\psi(h) > -\frac{1}{2}M$. Wówczas dla $\|h\| < \delta$ mamy $f(x_0+h) - f(x_0) \geqslant h^2(M+\psi(h)) \geqslant \frac{1}{2}Mh^2 > 0$. Zatem f przyjmuje w x_0 minimum lokalne. Podobnie dla formy ujemnie określonej otrzymujemy maksimum lokalne. Jeśli forma kwadratowa F jest nieokreślona, to $a = F(h) > 0$, $a' = F(h') < 0$, dla pewnych $h, h' \in \mathbb{R}^n$.

Stąd $\quad f(x^0 + th) - f(x^0) = t^2(a + h^2\psi(th)) > 0$ dla małych t

i $\quad f(x^0 + th') - f(x^0) = t^2(a' + h^2\psi(th)) < 0$ dla małych t.

Zatem f nie przyjmuje ekstremum lokalnego w x_0. □

W podobny sposób można uogólnić powyższe twierdzenie do:

Twierdzenie 21. *Niech $f\colon G \overset{otw.}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ m-krotnie różniczkowalna w $x_0 \in G$ oraz*

$$Df(x_0) = \ldots = D^{m-1}f(x_0) = 0 \quad i \quad D^m f(x_0) \neq 0.$$

Jeśli $D^m f(x_0)$ jest dodatnio (ujemnie) określona , to f posiada w x_0 minimum (maksimum) lokalne.

9.2. **Wzór Taylora.**

Twierdzenie 22 (Wzór Taylora dla funkcji)**.** *Niech $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcja k-krotnie różniczkowalna w G. Weźmy odcinek $[a, b] \subset G$ i niech f ma różniczkę rzędu $k + 1$ we wszystkich punktach (a, b). Zachodzi wówczas równość*

$$f(b) = f(a) + \frac{Df(a)}{1!}(b-a) + \frac{D^2f(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{D^kf(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{D^{k+1}f(a+\theta(b-a))}{(k+1)!}(b-a)^{k+1}$$

dla pewego $\theta \in (0, 1)$.

Dowód:

Weźmy funkcję $\phi(t) := f(a + t(b - a))$, $t \in [0, 1]$, $\phi\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^n$. Stosując wzór Taylora mamy

$$\phi(1) = \phi(0) + \frac{\phi'(0)}{1!} + \frac{\phi''(0)}{2!} + \cdots + \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\phi^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!} \quad \theta \in (0, 1).$$

Zauważmy, że $\phi'(t) = Df(a + t(b - a)) \cdot (b - a)$, ..., $\phi^{(k)}(t) = D^kf(a + t(b - a)) \cdot (b - a)^k$, a stąd wynika teza. □

Twierdzenie 23 (Wzór Taylora dla odwzorowań)**.** *Niech $f\colon G \overset{otw.}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, f jest k-krotnie różniczkowalna w G. Weźmy odcinek $[a, b] \subset G$ i niech f ma pochodną rzędu $k + 1$ we wszystkich punktach (a, b) i norma tej pochodnej jest nie większa niż M.*

Zachodzi wówczas nierówność:

(11)

$$\|f(b) - f(a) - \frac{Df(a)}{1!}(b-a) - \frac{D^2f(a)}{2!}(b-a)^2 - \ldots - \frac{D^kf(a)}{k!}(b-a)^k\| \leqslant M\frac{\|b-a\|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Uwaga 16. Jeśli K odwzorowanie k-liniowe z X w Y, to $|||K||| = \sup\limits_{\substack{\|x_i\|_x=1\\ i=1,\ldots,k}} \|K(x_1,\ldots,x_k)\|_Y$.

Dowód:

Indukcja ze względu na k.

1) $k=0$. Wówczas $\|f(b)-f(a)\| \leqslant M\|b-a\|$ – z tw. Lagrange'a o wartości średniej.

2) Załóżmy, że wzór jest prawdziwy dla $k-1$. Niech

$$g(t) = f(a+t(b-a)) - f(a) - \frac{Df(a)}{1!}t(b-a) - \ldots - \frac{D^{k-1}f(a)}{(k-1)!}t^{k-1}(b-a)^{k-1} - \frac{D^k f(a)}{k!}t^k(b-a)^k.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} Dg(t) &= Df(a+t(b-a))(b-a) - \frac{Df(a)}{1!}(b-a) - \frac{D^2f(a)2}{2!}(b-a)^2t - \ldots - \frac{D^kf(a)k}{k!}(b-a)^k t^{k-1} \\ &= \underbrace{\left\{Df(a+t(b-a)) - Df(a) - \frac{D^2f(a)}{1!}(b-a)t - \ldots - \frac{D^kf(a)}{(k-1)!}(b-a)^{k-1}t^{k-1}\right\}}_{\text{Szereg Taylora dla funkcji } Df}(b-a) \end{aligned}$$

$$|||Dg(t)||| \leqslant \|\{\quad\}\|\cdot\|b-a\|$$

$$|||\{\quad\}||| \leqslant \sup_{x\in(a,b)} |||D^k(Df)(x)|||\cdot \frac{\|b-a\|^k t^k}{k!} \leqslant M\frac{\|b-a\|^k t^k}{k!} = r'(t)$$

$$\| \underbrace{g(1)}_{\substack{\parallel \\ \text{wyrażenie wewnątrz normy w } (11)}} - \overset{\substack{0\\ \parallel}}{g(0)} \| \leqslant \|r(1)-r(0)\|\cdot\|b-a\| = M\frac{\|b-a\|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

$\square$