

Zadania z analizy wektorowej. Część II

Zadanie 9. Zbadać zbieżność ciągów i dla ciągów zbieżnych wskazać ich granice.

1. $(x_n, y_n) = (\log_{2n+3} 3, \frac{-3}{n})$,
2. $(x_n, y_n, z_n) = \left(\frac{1}{3^n}, \left(\frac{3}{4}\right)^{3n}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}\right)$.

Zadanie 10. (Twierdzenie o funkcji odwrotnej)

1. Niech $\phi(u, v) = (u + v \cos u, e^{2u}(v + 1))$. Wykazać, że istnieje otoczenie U punktu $(0, 0)$, takie, że $\phi|_U$ jest dyfeomorfizmem na obraz. Obliczyć pochodną $(\phi|_U)^{-1}$ w punkcie $(0, 1)$.

Zadanie 11. (Dyfeomorfizmy)

1. Niech $\phi(u, v) = (e^{u+v} + e^{u-v}, e^{u+v} - e^{u-v})$ dla $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Znaleźć $\phi(\mathbb{R}^2)$ oraz zbadać, czy ϕ jest dyfeomorfizmem.
2. Znaleźć dyfeomorfizm pewnego przedziału otwartego $P \subset \mathbb{R}^2$ na obszar $G \subset \mathbb{R}^2$, narysować ten obszar:
 - a) $G = \{(x, y) : y^2 < x < 2y^2, 2x^2 < y < 3x^2\}$,
 - b) $G = \{(x, y) : 0 < x, 0 < y < x^2\}$.
3. Wykazać, że odwzorowanie $\Phi(r, \alpha, \beta) = (r \cos \beta \cos \alpha, r \cos \beta \sin \alpha, r \sin \beta)$ jest dyfeomorfizmem przedziału $P = \{(r, \alpha, \beta) : r > 0, -\pi < \alpha < \pi, -\pi/2 < \beta < \pi/2\}$ na $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \leq 0\}$.
4. Znaleźć macierz różniczki dyfeomorfizmu odwrotnego względem dyfeomorfizmu sferycznego Φ z poprzedniego zadania.
5. Pokazać, że odwzorowanie $\phi(x, y) = \left(\frac{ax}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \frac{by}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)$, gdzie $a, b > 0$, jest dyfeomorfizmem \mathbb{R}^2 na obraz $\phi(\mathbb{R}^2)$. Znaleźć ten obraz.

Zadanie 12. (Rozmaitości i przestrzenie styczne)

1. Pokazać, że odwzorowanie $\phi(t) = (\cos t, \sin t, t)$ jest dyfeomorfizmem \mathbb{R} na obraz $\phi(\mathbb{R})$ (zwany linią śrubową). Znaleźć przestrzeń styczną i prostą styczną do linii śrubowej w punkcie $(1, 0, 0)$.
2. Niech $\phi : (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(\alpha, \beta) = (\cos \alpha \cos \beta, \sin \alpha \cos \beta, \sin \beta)$. Wykazać, że ϕ jest dyfeomorfizmem $(0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ na obraz. Znaleźć ten obraz. Znaleźć przestrzeń styczną i płaszczyznę styczną do tego obrazu w punkcie $(-1, 0, 0)$.
3. Niech $\mathbb{T} = \{\phi(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$, gdzie $\phi(x_1, x_2) = ((2 + \cos x_1) \cos x_2, (2 + \cos x_1) \sin x_2, \sin x_2)$. Wykazać, że torus \mathbb{T} jest dwuwymiarową rozmaitością. Znaleźć przestrzeń styczną i płaszczyznę styczną do \mathbb{T} w punkcie $(3, 0, 0)$.
4. Niech $\mathbb{T}_0 = \{\phi(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$, gdzie $\phi(x_1, x_2) = (\cos x_1, \sin x_1, \cos x_2, \sin x_2)$. Wykazać, że \mathbb{T}_0 jest dwuwymiarową rozmaitością. Znaleźć przestrzeń styczną i płaszczyznę styczną do \mathbb{T}_0 w punkcie $(1, 0, 1, 0)$.

Zadanie 13. (Twierdzenie o funkcji uwikłanej)

1. Wykazać, że układ równań

$$\begin{cases} xu - yv = 0 \\ yu + xv = 2 \end{cases}$$

określa w otoczeniu punktu $x_0 = y_0 = u_0 = v_0 = 1$ funkcje $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Policzyc różniczki $Du(x_0, y_0)$, $Dv(x_0, y_0)$.

2. Znaleźć $\frac{dy}{dx}$ jeśli $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.
3. Znaleźć $\frac{dy}{dx}$ dla $(x, y) = (0, 0)$, jeśli $(x^2 + y^2)^2 = 3x^2y - y^3$.
4. Znaleźć dz jeśli $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1$.
5. Znaleźć du jeśli $u^3 - 3(x + y)u^2 + z^3 = 0$.
6. Znaleźć $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ jeśli $f(x - y, y - z, z - x) = 0$.

Zadanie 14. Obliczyć $y'(x)$ i $y''(x)$, gdzie $y(x)$ jest określone równaniem:

1. $y - \sin y + x^2 = 0$;
2. $y^2 - \operatorname{arc} \operatorname{tg} y - e^x = 0$.

Zadanie 15. Napisać równania stycznych do krzywych określonych podanymi równaniami we wskazanych punktach A tych krzywych:

1. $x + x^3 = y^3 + y^5$, $A = (1, 1)$;
2. $2 + x^3 + y^3 = e^x + e^y$, $A = (0, 0)$.

Zadanie 16. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji uwikłanych $y = y(x)$ określonych równaniami:

1. $x^3 + y^3 - 8xy = 0$;
2. $x^2 + y^2 - xy - 2x + 4y = 0$;
3. $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$.