Zadania z analizy wektorowej. Część III

Zadanie 18. (Rozmaitości o równaniu $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$)

Zbadać, czy zbiór S jest rozmaitością. Jeśli tak, to wyznaczyć jej wymiar oraz znaleźć $T(p, S)$ i $N(p, S)$, gdzie $p \in S$:

1. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 1, \; x^2 - x + y^2 = 0\}$,
2. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + z^2 = 1, \; y^2 + z^2 = 1\}$,
3. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \sin \sqrt{x^2 + y^2} = y \cos \sqrt{x^2 + y^2}\}$,
4. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x - 2y + 3z = 0, \; x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 6xz = 4y(x + 3z)\}$,
5. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; e^{2x+y+z} + e^{3x-y} + \ln(1 + x + y) = 2\}$,
6. $S = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 : \; e^{x+y+u} + e^{x+y+v} + u = 2, \; e^{x+u} + e^{x+y-u} + u - v = 2\}$.

Zadanie 19. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji f na zbiorze S, gdzie:

1. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = 1\}$, $f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$;
2. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$;
3. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 4x^2 + y^2 = 25\}$, $f(x, y) = x^2 + 12xy + 2y^2$;
4. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+ : \; x + 2y + 3z = 1\}$, $f(x, y, z) = xy^2z^3$;
5. $S = \{x \in \mathbb{R}^n_: x_1 + x_2 + ... + x_n = a\}$ $(a > 0)$, $f(x) = x_1^p + x_2^p + ... + x_n^p$ $(p > 1)$.

Zadanie 20. Obliczyć drugie pochodne cząstkowe funkcji:

1. $f(x, y) = \ln(x + y^2)$,
2. $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$,
3. $f(x, y) = x \sin(x + y)$,
4. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$,
5. $f(x, y, z) = x^{y^z}$.

Zadanie 21. Niech f – funkcja dwukrotnie różniczkowalna. Znaleźć pochodne czątkowe drugiego rzędu:

1. $u(x, y, z) = f(x^2 + y^2 + z^2)$,
2. $u(x, y) = f(x + y, xy)$,
3. $u(x, y, z) = f(x, xy, xyz)$.

Zadanie 22. Znaleźć Δu, jeśli:

1. $u(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$,
2. $u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,
3. $u(x, y, z) = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$ gdzie f — dwukrotnie różniczkowalna.

Zadanie 23. Pokazać, że jeśli funkcja dwukrotnie różniczkowalna $f = f(x, y)$ spełnia równanie Laplace'a (tzn. $\Delta f = 0$) to również $u(x, y) = f(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$ spełnia to równanie.

Zadanie 24. Niech ϕ, ψ — funkcje dwukrotnie różniczkowalne. Wykazać, że:

1. $u(t,x) = \phi(x-at) + \psi(x+at)$ spełnia równanie
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$
2. $u(x,y) = x\phi(x+y) + y\psi(x+y)$ spełnia równanie
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Zadanie 25. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji f na $\mathbb{R}^2$:

1. $f(x,y) = x^2 y(4-x+y)$,
2. $f(x,y) = 6xy - x^3 - y^3$,
3. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4a^2xy + 2a^2$ (a – parametr),
4. $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$,
5. $f(x,y) = xy \ln\sqrt{x^2+y^2}$,
6. $f(x,y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$.

Zadanie 26. Znaleźć pochodne cząstkowe funkcji f:

1. $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ jeśli $f(x,y) = x\ln(xy)$,
2. $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ jeśli $f(x,y,z) = e^{xyz}$,
3. $\frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q}$ jeśli $f(x,y) = (x-a)^p(y-b)^q$,
4. $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$ jeśli $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x+y}$.

Zadanie 27. Znaleźć różniczkę $d^3 f(x,y)hh'h''$ dla:

1. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy(x-y)$,
2. $f(x,y) = \ln(x+y)$,
3. $f(x,y) = g(x+y)$, gdzie g – funkcja trzykrotnie różniczkowalna.

Zadanie 28. Napisać wzór Taylora względem punktu $(1,1,1)$ dla funkcji $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

Zadanie 29. Napisać wzór Taylora do pochodnych rzędu 2 względem punktu $(0,0)$ dla funkcji $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

Zadanie 30. Rozwinąć w szereg Taylora względem punktu $(1,1)$ funkcję $f(x,y) = \frac{x}{y}$.

Zadanie 31. Rozwinąć w szereg MacLaurina funkcję f:

1. $f(x,y) = \ln(1+2x+3y)$,
2. $f(x,y) = e^{3x}\cos(5y)$,
3. $f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$.