Ćwiczenia z analizy wektorowej. Zestaw I

Zadanie 1. Zdefiniujmy w przestrzeni $\mathbb{R}^k$ następujące normy:

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{k} |x_i| \quad \text{i} \quad \|x\|_\infty := \max_{i=1,\dots,k} |x_i|.$$

- Narysować kule jednostkowe w tych normach dla $k = 2$.
- Wykazać, że normy te są równoważne z normą euklidesową (dwie normy $||\cdot||$ i $|||\cdot|||$ są równoważne, jeśli istnieją stałe $c, C > 0$ takie, że $c||x|| \leqslant |||x||| \leqslant C||x||$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^k$.

Zadanie 2. Narysować podane zbiory i sprawdzić, czy są one: ograniczone, nieograniczone, otwarte, domknięte. Znaleźć wnętrze, domknięcie i brzeg podanych zbiorów.

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 \leqslant x \leqslant 3,\ y \geqslant 0\}$
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 > 4\}$
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 < xy < 2\}$
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |xy| < 1\}$
5. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y > |x|\}$
6. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$

Zadanie 3. Dla danego zbioru podać: zbiór punktów skupienia, zbiór punktów izolowanych, wnętrze, domknięcie, brzeg:

1. $A = \{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\}$
2. $B = \{\frac{m}{n} \colon m, n \in \mathbb{N}\}$
3. $C = \{(-1)^n(1 + \frac{1}{n}) \colon n \in \mathbb{N}\}$
4. $D = \{((-1)^n, (\frac{1}{2})^n) \colon n \in \mathbb{N}\}$

Zadanie 4. Policzyć granicę ciągów:

1. $(x_n, y_n, z_n) = (\frac{n^2}{n^2+3}, (1 + \frac{3}{n})^n, \cos n\pi)$
2. $(x_n, y_n, z_n) = (5 + (\frac{2}{3})^n, \frac{n+5}{n^2+1}, \sqrt[n]{n})$

Zadanie 5. Niech $f(x, y) \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zbadać istnienie granic $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x, y))$, $\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x, y))$ i $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ dla:

1. $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$
2. $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$
3. $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$

Zadanie 6. Znaleźć granice:

1. $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{xy}$
2. $\lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin xy}{x}$

Zadanie 7. Zbadać ciągłość funkcji $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2y^2+x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$