Ćwiczenia z analizy wektorowej. Zestaw II

Zadanie 8. Niech

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Wykazać, że istnieją pochodne kierunkowe f w punkcie $(0,0)$ w kierunku dowolnego wektora $v \in \mathbb{R}^2$, ale f nie jest ciągła w $(0,0)$.

Zadanie 9. Niech

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5}{(x^2-y)^2+x^8} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Wyliczyć pochodne kierunkowe f w punkcie $(0,0)$ w kierunku dowolnego wektora $v \in \mathbb{R}^2$ i pokazać, że f nie jest ciągła w $(0,0)$.

Zadanie 10. Niech

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Znaleźć pochodne cząstkowe f w dowolnym punkcie $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Zadanie 11. Znaleźć pochodne cząstkowe funkcji:

1. $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ dla $x \neq 0$
2. $f(x,y,z) = x^{yz}$ dla $x > 0$

Zadanie 12. Zbadać w jakich punktach jest różniczkowalna funkcja f oraz znaleźć Df i $\operatorname{grad} f$:

1. $f(x) = ||x||$ dla $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$
2. $f(x,y) = |x-y|$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Zadanie 13. Wykazać, że funkcja $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ jest ciągła w $(0,0)$, posiada w tym punkcie obie pochodne cząstkowe, ale nie jest różniczkowalna w $(0,0)$.

Zadanie 14. Wykazać, że funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

jest ciągła w $(0,0)$ i posiada ograniczone pochodne cząstkowe, ale nie jest różniczkowalna w $(0,0)$.

Zadanie 15. Wykazać, że funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

jest różniczkowalna w $(0,0)$, ale jej pochodne cząstkowe nie są ciągłe w tym punkcie i są nieograniczone w dowolnym jego otoczeniu.