Ćwiczenia z analizy wektorowej. Zestaw V

Zadanie 29. Znaleźć dyfeomorfizm pewnego przedziału otwartego $P \subset \mathbb{R}^2$ na obszar $G \subset \mathbb{R}^2$ i narysować ten obszar jeśli:

1. $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 < y < 2x^2,\ 1 < xy < 2\}$;
2. $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 < x^2 + y^2 < 4,\ 0 < x < y < 2x\}$;
3. $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 < 1\} \setminus \{(x, 0) \colon x \leqslant 0\}$, $a, b > 0$.

Zadanie 30. Zbadać, czy odwzorowanie $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ jest dyfeomorfizmem i czy jego przeciwdziedzina jest łukiem otwartym, jeśli:

1. $\varphi(t) = (t^3, t^6)$, $t \in \mathbb{R}$;
2. $\varphi(t) = (t, \sqrt[3]{t})$, $t \in \mathbb{R}$;
3. $\varphi(t) = (t^2, t^4)$, $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 31. Wykazać, że odwzorowanie $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t)$ jest dyfeomorfizmem. Jak wygląda jego przeciwdziedzina $\varphi(\mathbb{R})$?

Zadanie 32. Zbadaj, czy zbiór S jest rozmaitością, jeśli:

1. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leqslant 1\}$;
2. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = |x|\}$;
3. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |y| = |x|\}$;
4. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |y| = x^2\}$.

Zadanie 33. Wykazać, że $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ jest rozmaitością. Znaleźć przestrzeń styczną i powierzchnię styczną do S w $(x_0, y_0) \in S$ gdzie $x_0 \neq -1$.

Zadanie 34. Wykazać, że odwzorowanie $\varphi(r, \alpha) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha, \alpha)$ określone dla $(r, \alpha) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ jest dyfeomorfizmem, czyli $\varphi((0, +\infty) \times \mathbb{R}) = S$ jest płatem 2-wymiarowym (zwanym powierzchnią śrubową). Znaleźć przestrzeń styczną i powierzchnię styczną do S w punkcie $(1, 0, 0)$.