Ćwiczenia z analizy wektorowej. Zestaw IX

Zadanie 51. Niech $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ klasy C^2 spełnia warunki $0 = f(0) = D_i f(0) = D_i D_j f(0) = 0$ dla $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$ oraz $D_1^2 f(0) = D_2^2 f(0) = D_3^2 f(0) = c$.
Korzystając z lokalnego wzoru Taylora obliczyć

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{|x|^2}.$$

Zadanie 52. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 6y$,
2. $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 6xy$,
3. $f(x, y) = xy + e^{-x^2 - y^2}$.

Zadanie 53. Znaleźć n-te pochodne cząstkowe funkcji f oraz $d^3 f(x, y)hh'h''$, gdzie

1. $f(x, y) = e^{2x+3y}$,
2. $f(x, y) = xye^{x+y}$.

Zadanie 54. Znaleźć wszystkie funkcje p-krotnie różniczkowalnie $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takie, że $d^p f(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 55. Rozwinąć funkcję $f(x, y) = x^y$ względem punktu $(e, 1)$ do pochodnych rzędu dwa.

Zadanie 56. Rozwinąć funkcję $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ w szereg Taylora względem punktu $(1, -2)$.

Zadanie 57. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcje:

1. $f(x, y) = e^{4x-5y}$,
2. $f(x, y) = e^x \sin y$,
3. $f(x, y) = \ln(1 + x) \ln(1 + y)$.