Analiza wektorowa. Zakres podstawowy na egzamin ustny (na ocenę co najwyżej dobrą)

1. Przestrzeń wektorowa $\mathbb{R}^n$ i n-wymiarowa przestrzeń Euklidesowa.

2. Metryka w $\mathbb{R}^n$, kule otwarte i domknięte w $\mathbb{R}^n$, zbiory otwarte i domknięte w $\mathbb{R}^n$.

3. Zbieżność ciągów w $\mathbb{R}^n$. Charakteryzacja ciągów zbieżnych w $\mathbb{R}^n$ do x_0.

4. Granica odwzorowania i ciągłość funkcji w $\mathbb{R}^n$ (w sensie Cauchy'ego i Heinego). Ciągłość po współrzędnych a ciągłość w $\mathbb{R}^n$. Przykłady.

5. Pochodne kierunkowe i cząstkowe funkcji. Przykłady.

6. Definicja odwzorowania liniowego i różniczki odwzorowania. Pojęcie gradientu funkcji, macierzy Jacobiego i jakobianu odwzorowania. Przykłady.

7. Związek pomiędzy różniczką odwzorowania a pochodnymi kierunkowymi i cząstkowymi. (Twierdzenie 3 i 4).

8. Twierdzenie o pochodnej złożenia (Twierdzenie 5) wraz z przykładami.

9. Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego (Twierdzenie 6) i twierdzenia o wartości średniej dla funkcji i odwzorowań (Twierdzenia 7 i 9).

10. Twierdzenie o funkcji odwrotnej (Twierdzenie 10). Wzór na różniczkę funkcji odwrotnej.

11. Definicja dyfeomorfizmu. Przykłady.

12. Definicja płatu k-wymiarowego, rozmaitości k-wymiarowej, mapy rozmaitości i atlasu. Przykłady.

13. Definicja wektora stycznego i twierdzenie o przestrzeni stycznej do rozmaitości (Twierdzenie 11).

14. Twierdzenie o funkcji uwikłanej (Twierdzenie 12). Przykłady.

15. Twierdzenie o rozmaitości M o równania $F(x) = 0$ (Twierdzenie 13). Definicja wektorów normalnych do rozmaitości M w x_0 i wzór na znalezienie przestrzeni takich wektorów normalnych.

16. Twierdzenie o mnożnikach Lagrange'a (Twierdzenie 14). Przykłady stosowania.

17. Definicja pochodnych cząstkowych i różniczek wyższego rzędu. Przykłady.

18. Twierdzenie Schwarza o symetrii drugiej różniczki (Twierdzenie 17) i jego uogólnienie na k-te różniczki (Twierdzenie 18).

19. Dodatnia i ujemna określoność formy kwadratowej — kryteria. Warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego (Twierdzenie 20 i 21).

20. Wzór Taylora dla funkcji (Twierdzenie 22) wraz z dowodem.

21. Definicje: podziału P przedziału, objętości przedziału, sum dolnych i górnych orac funkcji całkowalnej f na przedziale A oraz całki z funkcji f na przedziale A. Przykłady całek policzonych z definicji.

22. Zbiory miary zero i objętości zero oraz związek pomiędzy tymi zbiorami. Przykłady.

23. Wahanie funkcji i jej związek z ciągłością. Twierdzenie o całkowalności funkcji, których zbiór nieciągłości jest miary zero (Twierdzenie 28).

24. Funkcje charakterystyczne zbioru, całki po dowolnych zbiorach, zbiory mierzalne w sensie Jordana, objętości zbiorów.

25. Całka dolna i górna. Twierdzenie Fubiniego (Twierdzenie 30). Przykłady.

26. Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie (Twierdzenie 32). Przykłady.

27. Całki krzywoliniowe pierwszego i drugiego rodzaju. Przykłady.

28. Twierdzenie Greena (Twierdzenie 33) i jego zastosowania.

29. Pola potencjalne i jego własności. Warunek konieczny i wystarczający potencjalności pola.

Analiza wektorowa. Zakres dodatkowy na egzamin ustny (na ocenę wyższą niż dobrą)

1. Nierówność Schwarza wraz z dowodem.

2. Dowód twierdzenia o pochodnej złożenia (Twierdzenie 5).

3. Dowody warunku koniecznego istnienia ekstremum lokalnego i twierdzenia o wartości średniej dla funkcji (Twierdzenia 6 i 7).

4. Konstrukcja całki z funkcji f na przedziale A.

5. Dowód twierdzenia Fubiniego (Twierdzenie 30).

6. Główne idee dowodu twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie (Twierdzenie 32).

7. Dowód twierdzenia Greena (Twierdzenie 33).