Egzamin z analizy wektorowej. Zestaw A. 7 II 2018.

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Zadanie 1. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^2\sin x}{x^2+y^2+x^4+y^4} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Zadanie 2. Niech $\Phi(x,y)=\big(x^2+2y\cos x+1,\sin x+e^{x+y}\big)$. Wykazać, ze istnieje otoczenie U punktu $(0,0)$, takie, że $\Phi_{|U}$ jest dyfeomorfizmem na obraz. Obliczyć pochodną $(\Phi_{|U})^{-1}$ w punkcie $(1,1)$.

Zadanie 3. Zbadać, czy zbiór $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+2y^2=1,\ x-4y-z=0\}$, jest rozmaitością. Jeśli tak, to wyznaczyć jej wymiar oraz znaleźć $T(p,S)$ i $N(p,S)$, gdzie $p=(1,0,1)\in S$.

Zadanie 4. Znaleźć ekstrema lokalne (o ile istnieją) funkcji $f(x,y)=x^4+y^4-9x^2-18xy+6-9y^2$.

Zadanie 5. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $f(x,y)=\sin(x-2y)$.

Zadanie 6. Obliczyć całkę $\iint\limits_D 2xy+x^2+y\,dx\,dy$, gdzie pole obszaru D jest ograniczone krzywymi $y=x$, $y=3x$ i $y=-x+4$.

Zadanie 7. Obliczyć całkę krzywoliniową niezorientowaną $\int\limits_\gamma(x+x^2y)\,dl$, gdzie γ — odcinek łącząca punkty $(0,3)$ i $(4,5)$.

Zadanie 8. Sprawdzić, czy całka krzywoliniowa zorientowana nie zależy od kształtu krzywej całkowania i jeśli tak to ją obliczyć. $\int\limits_{\gamma_{AB}}(2xy^3+\frac{1}{1+x^2})\,dx+(3x^2y^2+ye^y)\,dy$, gdzie γ_{AB} — krzywa o początku $A=(2,1)$ i końcu $B=(4,2)$.

Egzamin z analizy wektorowej. Zestaw B. 7 II 2018.

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Zadanie 1. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2\sin x}{x^2+y^2+x^4+y^4} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Zadanie 2. Niech $\Phi(x,y)=\big(\sin x+e^{x+y},x^2+2y\cos x+1\big)$. Wykazać, ze istnieje otoczenie U punktu $(0,0)$, takie, że $\Phi_{|U}$ jest dyfeomorfizmem na obraz. Obliczyć pochodną $(\Phi_{|U})^{-1}$ w punkcie $(1,1)$.

Zadanie 3. Zbadać, czy zbiór $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ y^2+2z^2=1,\ x-y+4z=0\}$, jest rozmaitością. Jeśli tak, to wyznaczyć jej wymiar oraz znaleźć $T(p,S)$ i $N(p,S)$, gdzie $p=(1,1,0)\in S$.

Zadanie 4. Znaleźć ekstrema lokalne (o ile istnieją) funkcji $f(x,y)=-x^4-y^4+9x^2+18xy+4+9y^2$.

Zadanie 5. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $f(x,y)=\cos(2x-y)$.

Zadanie 6. Obliczyć całkę $\iint\limits_D xy+x^2+y\,dx\,dy$, gdzie pole obszaru D jest ograniczone krzywymi $y=x$, $y=3x$ i $y=-x+8$.

Zadanie 7. Obliczyć całkę krzywoliniową niezorientowaną $\int\limits_\gamma(2x+xy^3)\,dl$, gdzie γ — odcinek łącząca punkty $(1,2)$ i $(5,4)$.

Zadanie 8. Sprawdzić, czy całka krzywoliniowa zorientowana nie zależy od kształtu krzywej całkowania i jeśli tak to ją obliczyć. $\int\limits_{\gamma_{AB}}(2xy^3+\frac{1}{1+x^2})\,dx+(3x^2y^2+ye^y)\,dy$, gdzie γ_{AB} — krzywa o początku $A=(3,1)$ i końcu $B=(1,2)$.