

Zadania z analizy wektorowej. Część I

Zadanie 1. Dla danego zbioru A znaleźć: zbiór punktów skupienia, zbiór punktów izolowanych, $\text{Int } A$, \overline{A} i $\text{Bd } A$. Czy zbiór A jest otwarty/domknięty?

1. $A = \{(-1)^n + (-1)^m + \frac{1}{n} - \frac{1}{m} : m, n \in \mathbb{N}\}$
2. $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_1 < 1, -1 < x_2 < 1\} \setminus \{(0, 0)\}$
3. $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$
4. $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 4\} \cup [-2, 2] \times \{0\}$

Zadanie 2. Zbadać istnienie granic:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow \infty} (\frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy}))$ $\lim_{y \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy}))$ $\lim_{y \rightarrow \infty} (\frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy})$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} (y + x \sin(\frac{1}{y})))$ $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} (y + x \sin(\frac{1}{y})))$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (y + x \sin(\frac{1}{y}))$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2})$ $\lim_{y \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2})$ $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2})$ $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2})$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2})$ $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2})$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+y^2}}{|x|+|y|})$ $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+y^2}}{|x|+|y|})$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[3]{x^2+y^2}}{|x|+|y|}$

Zadanie 3. Zbadać ciągłość funkcji:

1.
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
2.
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Zadanie 4. Znajdź granice funkcji:

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)}$.
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} (\frac{xy}{x^2 + y^2}) x^2$.
4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, a)} (1 + \frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$.
5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Zadanie 5. Znajdź pochodne kierunkowe funkcji:

1. $f(x, y) = x^2 - y^2$ w punkcie $(1, 1)$ w kierunku, który tworzy kąt $\frac{\pi}{3}$ z osią OX.
2. $f(x, y) = 1 - (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})$ w punkcie $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$ w kierunku wewnętrznej normalnej do krzywej: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
3. $f(x, y, z) = xyz$ w punkcie $(1, 1, 1)$ w kierunku $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

Zadanie 6. Zbadaj różniczkowalność funkcji:

1. $f(x, y) = \frac{xy}{1+|x|+|y|}$

2. $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$

3. $f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

4. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

5. $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^3+y^3} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

6. $f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Zadanie 7. Policzyc $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$ dla:

1. $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

2. $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

3. $u(x, y) = f(x, \frac{x}{y})$, gdzie f — funkcja różniczkowalna.

Zadanie 8. Niech f — funkcja różniczkowalna. Wykazać, że:

1. $u(x, y) = yf(x^2 - y^2)$ spełnia $y^2 \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial u}{\partial y} = xu$.

2. $u(x, y) = f(x^2 + y^2)$ spełnia $y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

3. $u(x, y) = \frac{y^2}{3x} + f(xy)$ spełnia $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - xy \frac{\partial u}{\partial y} + y^2 = 0$.