

Zadania z analizy wektorowej. Część II

Zadanie 9. Zbadać zbieżność ciągów i dla ciągów zbieżnych wskazać ich granice.

1. $(x_n, y_n) = (\log_{2n+3} 3, \frac{-3}{n})$,
2. $(x_n, y_n, z_n) = \left(\frac{1}{3^n}, \left(\frac{3}{4}\right)^{3n}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}\right)$.

Zadanie 10. Znajdź ekstrema funkcji f na zbiorze F , gdzie:

1. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$;
2. $f(x, y) = x^2 + xy + 2y$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
3. $f(x, y, z) = (x + y + z)e^{-x-2y-3z}$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

Zadanie 11. (Twierdzenie o funkcji odwrotnej)

1. Niech $\phi(u, v) = (u + v \cos u, e^{2u}(v + 1))$. Wykazać, że istnieje otoczenie U punktu $(0, 0)$, takie, że $\phi|_U$ jest dyfeomorfizmem na obraz. Obliczyć pochodną $(\phi|_U)^{-1}$ w punkcie $(0, 1)$.

Zadanie 12. (Dyfeomorfizmy)

1. Niech $\phi(u, v) = (e^{u+v} + e^{u-v}, e^{u+v} - e^{u-v})$ dla $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Znaleźć $\phi(\mathbb{R}^2)$ oraz zbadać, czy ϕ jest dyfeomorfizmem.
2. Znaleźć dyfeomorfizm pewnego przedziału otwartego $P \subset \mathbb{R}^2$ na obszar $G \subset \mathbb{R}^2$, narysować ten obszar:
 - a) $G = \{(x, y) : y^2 < x < 2y^2, 2x^2 < y < 3x^2\}$,
 - b) $G = \{(x, y) : 0 < x, 0 < y < x^2\}$.
3. Wykazać, że odwzorowanie $\Phi(r, \alpha, \beta) = (r \cos \beta \cos \alpha, r \cos \beta \sin \alpha, r \sin \beta)$ jest dyfeomorfizmem przedziału $P = \{(r, \alpha, \beta) : r > 0, -\pi < \alpha < \pi, -\pi/2 < \beta < \pi/2\}$ na $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \leq 0\}$.
4. Znaleźć macierz różniczki dyfeomorfizmu odwrotnego względem dyfeomorfizmu sferycznego Φ z poprzedniego zadania.
5. Pokazać, że odwzorowanie $\phi(x, y) = \left(\frac{ax}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \frac{by}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)$, gdzie $a, b > 0$, jest dyfeomorfizmem \mathbb{R}^2 na obraz $\phi(\mathbb{R}^2)$. Znaleźć ten obraz.

Zadanie 13. (Rozmaitości i przestrzenie styczne)

1. Pokazać, że odwzorowanie $\phi(t) = (\cos t, \sin t, t)$ jest dyfeomorfizmem \mathbb{R} na obraz $\phi(\mathbb{R})$ (zwany linią śrubową). Znaleźć przestrzeń styczną i prostą styczną do linii śrubowej w punkcie $(1, 0, 0)$.
2. Niech $\phi : (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(\alpha, \beta) = (\cos \alpha \cos \beta, \sin \alpha \cos \beta, \sin \beta)$. Wykazać, że ϕ jest dyfeomorfizmem $(0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ na obraz. Znaleźć ten obraz. Znaleźć przestrzeń styczną i płaszczyznę styczną do tego obrazu w punkcie $(-1, 0, 0)$.
3. Niech $\mathbb{T} = \{\phi(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$, gdzie $\phi(x_1, x_2) = ((2 + \cos x_1) \cos x_2, (2 + \cos x_1) \sin x_2, \sin x_2)$. Wykazać, że torus \mathbb{T} jest dwuwymiarową rozmaitością. Znaleźć przestrzeń styczną i płaszczyznę styczną do \mathbb{T} w punkcie $(3, 0, 0)$.
4. Niech $\mathbb{T}_0 = \{\phi(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$, gdzie $\phi(x_1, x_2) = (\cos x_1, \sin x_1, \cos x_2, \sin x_2)$. Wykazać, że \mathbb{T}_0 jest dwuwymiarową rozmaitością. Znaleźć przestrzeń styczną i płaszczyznę styczną do \mathbb{T}_0 w punkcie $(1, 0, 1, 0)$.