Zadania z analizy wektorowej. Część III

Zadanie 14. (Twierdzenie o funkcji uwikłanej)

1. Wykazać, że układ równań
$$\begin{cases} xu - yv = 0 \\ yu + xv = 2 \end{cases}$$
określa w otoczeniu punktu $x_0 = y_0 = u_0 = v_0 = 1$ funkcje $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Policzyć różniczki $Du(x_0, y_0)$, $Dv(x_0, y_0)$.

2. Znaleźć $\frac{dy}{dx}$ jeśli $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

3. Znaleźć $\frac{dy}{dx}$ dla $(x, y) = (0, 0)$, jeśli $(x^2 + y^2)^2 = 3x^2y - y^3$.

4. Znaleźć dz jeśli $\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y} + 1$.

5. Znaleźć du jeśli $u^3 - 3(x + y)u^2 + z^3 = 0$.

6. Znaleźć $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ jeśli $f(x - y, y - z, z - x) = 0$.

Zadanie 15. Obliczyć $y'(x)$ i $y''(x)$, gdzie $y(x)$ jest określone równaniem:

1. $y - \sin y + x^2 = 0$;

2. $y^2 - \operatorname{arc\,tg} y - e^x = 0$.

Zadanie 16. Napisać równania stycznych do krzywych określonych podanymi równaniami we wskazanych punktach A tych krzywych:

1. $x + x^3 = y^3 + y^5$, $A = (1, 1)$;

2. $2 + x^3 + y^3 = e^x + e^y$, $A = (0, 0)$.

Zadanie 17. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji uwikłanych $y = y(x)$ określonych równaniami:

1. $x^3 + y^3 - 8xy = 0$;

2. $x^2 + y^2 - xy - 2x + 4y = 0$;

3. $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$.

Zadanie 18. (Rozmaitości o równaniu $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$)
Zbadać, czy zbiór S jest rozmaitością. Jeśli tak, to wyznaczyć jej wymiar oraz znaleźć $T(p, S)$ i $N(p, S)$, gdzie $p \in S$:

1. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 - x + y^2 = 0\}$,

2. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + z^2 = 1,\ y^2 + z^2 = 1\}$,

3. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \sin\sqrt{x^2 + y^2} = y \cos\sqrt{x^2 + y^2}\}$,

4. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x - 2y + 3z = 0,\ x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 6xz = 4y(x + 3z)\}$,

5. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ e^{2x+y+z} + e^{3x-y} + \ln(1 + x + y) = 2\}$,

6. $S = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 :\ e^{x+y+u} + e^{x+y+v} + u = 2,\ e^{x+u} + e^{x+y-u} + u - v = 2\}$.

Zadanie 19. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji f na zbiorze S, gdzie:

1. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 1\}$, $f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$;

2. $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\}$, $f(x,y)=x^2+y^2$;
3. $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 4x^2+y^2=25\}$, $f(x,y)=x^2+12xy+2y^2$;
4. $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3_+:\ x+2y+3z=1\}$, $f(x,y,z)=xy^2z^3$;
5. $S=\{x\in\mathbb{R}^n_:\ x_1+x_2+...+x_n=a\}$ $(a>0)$, $f(x)=x_1^p+x_2^p+...+x_n^p$ $(p>1)$.

Zadanie 20. Obliczyć drugie pochodne cząstkowe funkcji:

1. $f(x,y)=\ln(x+y^2)$,
2. $f(x,y)=\frac{x}{y^2}$,
3. $f(x,y)=x\sin(x+y)$,
4. $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$,
5. $f(x,y,z)=x^{y^z}$.

Zadanie 21. Niech f – funkcja dwukrotnie różniczkowalna. Znaleźć pochodne czątkowe drugiego rzędu:

1. $u(x,y,z)=f(x^2+y^2+z^2)$,
2. $u(x,y)=f(x+y,xy)$,
3. $u(x,y,z)=f(x,xy,xyz)$.

Zadanie 22. Znaleźć Δu, jeśli:

1. $u(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$,
2. $u(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,
3. $u(x,y,z)=f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$ gdzie f — dwukrotnie różniczkowalna.

Zadanie 23. Pokazać, że jeśli funkcja dwukrotnie różniczkowalna $f=f(x,y)$ spełnia równanie Laplace'a (tzn. $\Delta f=0$) to również $u(x,y)=f(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2})$ spełnia to równanie.

Zadanie 24. Niech ϕ,ψ — funkcje dwukrotnie różniczkowalne. Wykazać, że:

1. $u(t,x)=\phi(x-at)+\psi(x+at)$ spełnia równanie
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$
2. $u(x,y)=x\phi(x+y)+y\psi(x+y)$ spełnia równanie
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Zadanie 25. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji f na $\mathbb{R}^2$:

1. $f(x,y)=x^2y(4-x+y)$,
2. $f(x,y)=6xy-x^3-y^3$,
3. $f(x,y)=x^4+y^4-4a^2xy+2a^2$ (a – parametr),
4. $f(x,y)=1-\sqrt{x^2+y^2}$,

5. $f(x, y) = xy \ln \sqrt{x^2 + y^2}$,
6. $f(x, y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$.

Zadanie 26. Znaleźć pochodne cząstkowe funkcji f:

1. $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ jeśli $f(x, y) = x \ln(xy)$,
2. $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ jeśli $f(x, y, z) = e^{xyz}$,
3. $\frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q}$ jeśli $f(x, y) = (x - a)^p (y - b)^q$,
4. $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$ jeśli $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x+y}$.

Zadanie 27. Znaleźć różniczkę $d^3 f(x, y)hh'h''$ dla:

1. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy(x - y)$,
2. $f(x, y) = \ln(x + y)$,
3. $f(x, y) = g(x + y)$, gdzie g – funkcja trzykrotnie różniczkowalna.

Zadanie 28. Napisać wzór Taylora względem punktu $(1, 1, 1)$ dla funkcji $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

Zadanie 29. Napisać wzór Taylora do pochodnych rzędu 2 względem punktu $(0, 0)$ dla funkcji $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Zadanie 30. Rozwinąć w szereg Taylora względem punktu $(1, 1)$ funkcję $f(x, y) = \frac{x}{y}$.

Zadanie 31. Rozwinąć w szereg MacLaurina funkcję f:

1. $f(x, y) = \ln(1 + 2x + 3y)$,
2. $f(x, y) = e^{3x} \cos(5y)$,
3. $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$.