

Ćwiczenia z analizy wektorowej. Zestaw X

Zadanie 58. Oblicz całki iterowane:

1. $\int_1^2 dx \int_0^3 (x + y^2 x) dy$;
2. $\int_0^3 dy \int_1^2 (x + y^2 x) dx$.

Zadanie 59. Oblicz całki podwójne:

1. $\iint_R e^{x+y} dx dy$, gdzie $R = [0, 1] \times [0, 1]$;
2. $\iint_R \sin(x + y) dx dy$, gdzie $R = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \times [0, \frac{\pi}{4}]$.

Zadanie 60. Przedstawić $\iint_D f(x, y) dx dy$ w postaci całki iterowanej jeśli zbiór $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ograniczony jest krzywymi:

1. $x^2 y^4 = 1$;
2. $y = x^2, y = \sqrt{x}$;
3. $y = 0, x = 2, y = x^2$;
4. $y = \frac{1}{x}, y = x, y = 2x (x > 0)$;
5. $x^2 + y^2 = 1$;
6. $y = x^2, y = -x + 2, y = 0, x = \frac{2}{3}$.

Zadanie 61. Obliczyć miarę zbioru:

1. $A = \{(x, y): \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} < 1\}$;
2. $B = \{(x, y, z): -1 < x < 1, -1 < y < 1, 0 < z < x^2 + y^2\}$.

Zadanie 62. Zamienić kolejność całkowania w całkach iterowanych:

1. $\int_0^4 (\int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy) dx$;
2. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz dy dx$.

Zadanie 63. Oblicz podane całki:

1. $\iint_D (x^2 - xy) dx dy$, gdzie $D = \{(x, y): y \geq x, y \leq 3x - x^2\}$;
2. $\iint_D y dx dy$, gdzie $D = \{(x, y): x \leq \arcsin y, y \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, x \geq 0\}$;
3. $\iint_D xy dx dy$, gdzie D jest ograniczony krzywymi $xy = 1$ i $|x - y| = 1$;
4. $\iint_D x + y dx dy$, gdzie D jest ograniczony krzywymi $y = \sqrt{|x|}, 2y = |x|$ i $|x| = 1$;
5. $\iint_D \operatorname{sgn}(y - x^2) dx dy$, gdzie $D = [0, 2] \times [0, 2]$;
6. $\iint_D \frac{xy dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$, gdzie $D = [0, 1] \times [0, 1]$;
7. $\iiint_P \ln x^{yz} dx dy dz$, gdzie $P = [1, e] \times [1, 2] \times [2, 3]$;
8. $\iiint_P xyz dx dy dz$, gdzie $P = \{(x, y, z): y \geq x^2, x \geq y^2, 0 \leq z \leq xy\}$;
9. $\iiint_P \cos \frac{z}{y} dx dy dz$, gdzie P jest ograniczony krzywymi $y = \frac{\pi}{6}, y = x, x = \frac{\pi}{2}, z = xy$ i $z = 0$.