

Ćwiczenia z analizy wektorowej. Zestaw XI

Zadanie 64. Dokonując odpowiedniej zamiany zmiennych obliczyć całki

1. $\iint_D xy \, dx \, dy$, gdzie $D = \{(x, y) : 1 \leq xy \leq 2, 1 \leq \frac{y}{x^2} \leq 3\}$;
2. $\iint_D (x + y) \, dx \, dy$, gdzie D jest ograniczony krzywymi: $2x + y = 2$, $2x + y = 3$, $x - y = -1$,
 $x - y = 1$.

Zadanie 65. Zamieniając na współrzędne biegunowe oblicz podane całki:

1. $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$ (wskazówka: oblicz najpierw $I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy$);
2. $\iint_D y \, dx \, dy$, gdzie $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$;
3. $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$, gdzie D jest ograniczony krzywymi $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0$, $y = 1$ ($x \leq 0$, $y \geq 1$).

Zadanie 66. Zamieniając na współrzędne sferyczne oblicz podane całki:

1. $\iiint_U z^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$, gdzie U jest obszarem ograniczonym powierzchniami
 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = 0$;
2. $\iiint_U \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$, gdzie U jest obszarem ograniczonym powierzchnią
 $x^2 + y^2 + z^2 - z = 0$.

Zadanie 67. Zamieniając na współrzędne walcowe oblicz podane całki:

1. $\iiint_U x^2 \, dx \, dy \, dz$, gdzie U jest obszarem ograniczonym powierzchniami $z = 9 - x^2 - y^2$,
 $z = 0$;
2. $\iiint_U z^2 \, dx \, dy \, dz$, gdzie U jest obszarem ograniczonym powierzchniami $z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$,
 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$