Ćwiczenia z analizy wektorowej. Zestaw IV

Zadanie 23. Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$f(r,\alpha) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha). \tag{1}$$

Znaleźć $D_1 f$, $D_2 f$, $\operatorname{matr} df$ i Jf.

Zadanie 24. Na co funkcja f dana przez (1) przeprowadza proste $r = \text{const}$ i $\alpha = \text{const}$?

Zadanie 25. Niech $G = \{(r,\alpha) \in \mathbb{R}^2\colon r > 0\}$. Korzystając z twierdzenia o funkcji odwrotnej wykaż, że funkcja f zadana przez (1) jest lokalnie różnowartościowa. Czy jest różnowartościowa na całym G?

Zadanie 26. Niech $G_0 = \{(r,\alpha) \in \mathbb{R}^2\colon r > 0,\ -\pi < \alpha < \pi\}$. Wykaż, że f zadane przez (1) jest różnowartościowe na G_0. Co to jest $f(G_0)$? Korzystając z twierdzenia o funkcji odwrotnej wykaż, że funkcja $g = f^{-1}$ jest klasy C^1 oraz znajdź $\operatorname{matr} dg$.

Zadanie 27. Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$f(x,y) = (e^x\cos y, e^x\sin y). \tag{2}$$

Jaki jest obraz f? Pokazać, że $Jf(x,y) \neq 0$ dla każdego $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ale f nie jest różnowartościowa.

Zadanie 28. Niech f zadane przez (2), $a = (0, \frac{\pi}{3})$, $b = f(a)$, zaś g — funkcja odwrotna do f określona w otoczeniu b i taka, że $g(b) = a$. Znaleźć jawną postać g. Obliczyć $df(a)$, $dg(b)$ i sprawdzić, czy $\operatorname{matr} df(a) = [\operatorname{matr} dg(b)]^{-1}$.