Ćwiczenia z analizy wektorowej. Zestaw VII

Zadanie 42. Zbadać, czy zbiór S jest rozmaitością. Jeśli tak, to wyznaczyć jej wymiar oraz znaleźć $T(p,S)$ i $N(p,S)$, gdzie $p \in S$:

1. $S = \{x \in \mathbb{R}^m \colon \sum_{i=1}^{m} (\frac{x_i}{a_i})^2 = 1\}$ $(m \geqslant 2,\ a_1, \ldots, a_m > 0)$,
2. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = 0,\ x^2 + y^2 = 1\}$.

Zadanie 43. Znaleźć równanie przestrzeni stycznej i normalnej do powierzchni $x^2+y^2+z^2 = 169$ w punkcie $(3,4,12)$.

Zadanie 44. Znaleźć ekstrema funkcji f na zbiorze S, gdzie:

1. $S = \{x \in \mathbb{R}^m \colon x_1^2 + \cdots + x_m^2 = 1\}$, $f(x) = x_1 \cdots x_m$.
2. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$.
3. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ $(a > b > c > 0)$, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.
4. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3_+ \colon x^2 + y^2 = 2,\ y + z = 2\}$, $f(x,y,z) = xy + yz$.