

Ćwiczenia z analizy wektorowej. Zestaw VIII

Zadanie 45. Obliczyć drugie pochodne cząstkowe funkcji:

1. $f(x, y) = x^y$ dla $x > 0, y \in \mathbb{R}$;
2. $u(x, y, z) = f(x + y, \sin(x + z))$, gdzie f jest funkcją klasy C^2 na \mathbb{R}^2 .

Zadanie 46. Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Wykazać, że:

- a) $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ są ciągłe na \mathbb{R}^2 ;
- b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ istnieją na \mathbb{R}^2 i są ciągłe poza $(0, 0)$;
- c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Zadanie 47. Niech $f(x, y) = xe^{xy^2}$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Wykazać, że f jest dwukrotnie różniczkowalna oraz znaleźć $D^2 f(1, 1)hh'$.

Zadanie 48. Niech $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dwukrotnie różniczkowalna. Wykazać, że $g(t) = f(\cos t, \sin t)$ jest również dwukrotnie różniczkowalna oraz znaleźć jej drugą pochodną.

Zadanie 49. Policzyc $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ jeśli $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

Zadanie 50. Wyrazić operator Laplace'a Δ we współrzędnych biegunowych, czyli wyrazić $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos \alpha, r \sin \alpha) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ przez pochodne cząstkowe funkcji $\tilde{f}(r, \alpha) = f(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$.