Zadania z analizy wektorowej. Część I

Zadanie 1. Dla danego zbioru A znaleźć: zbiór punktów skupienia, zbiór punktów izolowanych, $\operatorname{Int} A$, $\overline{A}$ i $\operatorname{Bd} A$. Czy zbiór A jest otwarty/domknięty?

1. $A = \{(-1)^n + (-1)^m + \frac{1}{n} - \frac{1}{m} : m, n \in \mathbb{N}\}$
2. $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 < x_1 < 1, \ -1 < x_2 < 1\} \setminus \{(0,0)\}$
3. $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x_1 < 1, \ 0 < x_2 < 1\}$
4. $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leqslant x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4\} \cup [-2, 2] \times \{0\}$

Zadanie 2. Zbadać istnienie granic:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to\infty}(\frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy}))$ $\quad \lim\limits_{y\to\infty}(\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy}))$ $\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to\infty}}(\frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy})$
2. $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0}(y + x\sin(\frac{1}{y})))$ $\quad \lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0}(y + x\sin(\frac{1}{y})))$ $\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(y + x\sin(\frac{1}{y}))$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\lim\limits_{y\to\infty} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2})$ $\quad \lim\limits_{y\to\infty}(\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2})$ $\quad \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2})$ $\quad \lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2})$ $\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2})$ $\quad \lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2})$ $\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+y^2}}{|x|+|y|})$ $\quad \lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+y^2}}{|x|+|y|})$ $\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt[3]{x^2+y^2}}{|x|+|y|}$

Zadanie 3. Zbadać ciągłość funkcji:

1.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zadanie 4. Znajdź granice funkcji:

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$.
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} (\frac{xy}{x^2+y^2})^{x^2}$.
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,a)} (1+\frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$.
5. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Zadanie 5. Znajdź pochodne kierunkowe funkcji:

1. $f(x,y) = x^2 - y^2$ w punkcie $(1,1)$ w kierunku, który tworzy kąt $\frac{\pi}{3}$ z osią OX.
2. $f(x,y) = 1 - (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})$ w punkcie $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$ w kierunku wewnętrznej normalnej do krzywej: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
3. $f(x,y,z) = xyz$ w punkcie $(1,1,1)$ w kierunku $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Zadanie 6. Zbadaj różniczkowalność funkcji:

1. $f(x,y) = \frac{xy}{1+|x|+|y|}$
2. $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$
3. $f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$
4. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$
5. $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^3+y^3} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$
6. $f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Zadanie 7. Policzyć $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$ dla:

1. $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$
2. $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$
3. $u(x,y) = f(x, \frac{x}{y})$, gdzie f — funkcja różniczkowalna.

Zadanie 8. Niech f — funkcja różniczkowalna. Wykazać, że:

1. $u(x,y) = yf(x^2-y^2)$ spełnia $y^2\frac{\partial u}{\partial x} + xy\frac{\partial u}{\partial y} = xu$.
2. $u(x,y) = f(x^2+y^2)$ spełnia $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
3. $u(x,y) = \frac{y^2}{3x} + f(xy)$ spełnia $x^2\frac{\partial u}{\partial x} - xy\frac{\partial u}{\partial y} + y^2 = 0$.