Zadania z analizy wektorowej. Część II

Zadanie 9. Zbadać zbieżność ciągów i dla ciągów zbieżnych wskazać ich granice.

1. $(x_n, y_n) = (\log_{2n+3} 3, \frac{-3}{n})$,
2. $(x_n, y_n, z_n) = \left(\frac{1}{3^n}, \left(\frac{3}{4}\right)^{3n}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}\right)$.

Zadanie 10. Znajdź ekstrema funkcji f na zbiorze F, gdzie:

1. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$, $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| \leqslant 1\}$;
2. $f(x,y) = x^2 + xy + 2y$, $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$;
3. $f(x,y,z) = (x+y+z)e^{-x-2y-3z}$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$.

Zadanie 11. (Twierdzenie o funkcji odwrotnej)

1. Niech $\phi(u,v) = \big(u + v\cos u, e^{2u}(v+1)\big)$. Wykazać, ze istnieje otoczenie U punktu $(0,0)$, takie, że $\phi_{|U}$ jest dyfeomorfizmem na obraz. Obliczyć pochodną $(\phi_{|U})^{-1}$ w punkcie $(0,1)$.

Zadanie 12. (Dyfeomorfizmy)

1. Niech $\phi(u,v) = (e^{u+v} + e^{u-v}, e^{u+v} - e^{u-v})$ dla $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Znaleźć $\phi(\mathbb{R}^2)$ oraz zbadać, czy ϕ jest dyfeomorfizmem.
2. Znaleźć dyfeomorfizm pewnego przedziału otwartego $P \subset \mathbb{R}^2$ na obszar $G \subset \mathbb{R}^2$, narysować ten obszar:
   a) $G = \{(x,y) : \ y^2 < x < 2y^2, \ 2x^2 < y < 3x^2\}$,
   b) $G = \{(x,y) : \ O < x, \ 0 < y < x^2\}$.
3. Wykazać, że odwzorowanie $\Phi(r,\alpha,\beta) = (r\cos\beta\cos\alpha, r\cos\beta\sin\alpha, r\sin\beta)$ jest dyfeomorfizmem przedziału $P = \{(r,\alpha,\beta) : \ r > 0, \ -\pi < \alpha < \pi, \ -\pi/2 < \beta < \pi/2\}$ na $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z) : \ x \leqslant 0\}$.
4. Znaleźć macierz różniczki dyfeomorfizmu odwrotnego względem dyfeomorfizmu sferycznego Φ z poprzedniego zadania.
5. Pokazać, że odwzorowanie $\phi(x,y) = \Big(\frac{ax}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \frac{by}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\Big)$, gdzie $a, b > 0$, jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}^2$ na obraz $\phi(\mathbb{R}^2)$. Znaleźć ten obraz.

Zadanie 13. (Rozmaitości i przestrzenie styczne)

1. Pokazać, że odwzorowanie $\phi(t) = (\cos t, \sin t, t)$ jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}$ na obraz $\phi(\mathbb{R})$ (zwany linią śrubową). Znaleźć przestrzeń styczną i prostą styczną do linii śrubowej w punkcie $(1,0,0)$.
2. Niech $\phi : (0,2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$, $\phi(\alpha,\beta) = (\cos\alpha\cos\beta, \sin\alpha\cos\beta, \sin\beta)$. Wykazać, że ϕ jest dyfeomorfizmem $(0,2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ na obraz. Znaleźć ten obraz. Znaleźć przestrzeń styczną i płaszczyznę styczną do tego obrazu w punkcie $(-1,0,0)$.
3. Niech $\mathbb{T} = \{\phi(x_1,x_2) : (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\}$, gdzie $\phi(x_1,x_2) = \big((2+\cos x_1)\cos x_2, (2+\cos x_1)\sin x_2, \sin x_2\big)$. Wykazać, że torus $\mathbb{T}$ jest dwuwymiarową rozmaitością. Znaleźć przestrzeń styczną i płaszczyznę styczną do $\mathbb{T}$ w punkcie $(3,0,0)$.
4. Niech $\mathbb{T}_0 = \{\phi(x_1,x_2) : (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\}$, gdzie $\phi(x_1,x_2) = \big(\cos x_1, \sin x_1, \cos x_2, \sin x_2\big)$. Wykazać, że $\mathbb{T}_0$ jest dwuwymiarową rozmaitością. Znaleźć przestrzeń styczną i płaszczyznę styczną do $\mathbb{T}_0$ w punkcie $(1,0,1,0)$.

Zadanie 14. (Twierdzenie o funkcji uwikłanej)

1. Wykazać, że układ równań
$$\begin{cases} xu - yv = 0 \\ yu + xv = 2 \end{cases}$$
określa w otoczeniu punktu $x_0 = y_0 = u_0 = v_0 = 1$ funkcje $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Policzyć różniczki $Du(x_0, y_0)$, $Dv(x_0, y_0)$.

2. Znaleźć $\frac{dy}{dx}$ jeśli $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

3. Znaleźć $\frac{dy}{dx}$ dla $(x, y) = (0, 0)$, jeśli $(x^2 + y^2)^2 = 3x^2y - y^3$.

4. Znaleźć dz jeśli $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1$.

5. Znaleźć du jeśli $u^3 - 3(x + y)u^2 + z^3 = 0$.

6. Znaleźć $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ jeśli $f(x - y, y - z, z - x) = 0$.

Zadanie 15. Obliczyć $y'(x)$ i $y''(x)$, gdzie $y(x)$ jest określone równaniem:

1. $y - \sin y + x^2 = 0$;

2. $y^2 - \operatorname{arc\,tg} y - e^x = 0$.

Zadanie 16. Napisać równania stycznych do krzywych określonych podanymi równaniami we wskazanych punktach A tych krzywych:

1. $x + x^3 = y^3 + y^5$, $A = (1, 1)$;

2. $2 + x^3 + y^3 = e^x + e^y$, $A = (0, 0)$.

Zadanie 17. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji uwikłanych $y = y(x)$ określonych równaniami:

1. $x^3 + y^3 - 8xy = 0$;

2. $x^2 + y^2 - xy - 2x + 4y = 0$;

3. $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$.