

Egzamin z analizy wektorowej. Zestaw A. 11 II 2022

Imię i Nazwisko:

Numer indeksu:

Zadanie 1. Korzystając z twierdzenia o mnożnikach Lagrange'a znaleźć ekstrema warunkowe funkcji $f(x, y) = 2x + 3y$ na zbiorze $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 = 4\}$.

Zadanie 2. Znaleźć $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ jeśli $f(xy^2, x + 2y + 3z, z - x) = 0$, gdzie f jest klasy C^1 .

Zadanie 3. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = 12xy - x^3 - y^3$ na $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 4. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_D (2x^2 + xy) \, dx \, dy,$$

gdzie zbiór D jest trójkątem ograniczonym prostą $x + 2y = 4$ i osiami współrzędnych.

Zadanie 5. Korzystając z zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe r i α obliczyć

$$\iint_D x\sqrt{x^2 + y^2} + x^2y \, dx \, dy,$$

gdzie obszar D jest ograniczony krzywymi $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 16$, $x = 0$, $y = -x$ ($y \leq 0$).

Zadanie 6. Zbadać ciągłość i różniczkowalność w punkcie $(0, 0)$ funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3 + x^2y^2}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Zadanie 7. Pokazać, że odwzorowanie $\phi(t) = (\cos t, \sin t, t + 5)$ jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}$ na obraz $\phi(\mathbb{R})$. Znaleźć przestrzeń styczną i prostą styczną do $\phi(\mathbb{R})$ w punkcie $(1, 0, 5)$.

Zadanie 8. Sprawdzić, czy podana całka krzywoliniowa zorientowana

$$\int_{\gamma} (y^3 \cos x + 8e^{2x}) \, dx + (3y^2 \sin x + \cos y) \, dy,$$

gdzie γ — krzywa o początku $A = (2, 2)$ i końcu $B = (3, 1)$ nie zależy od kształtu krzywej całkowania i jeśli tak to ją obliczyć.

Egzamin z analizy wektorowej. Zestaw B. 11 II 2022

Imię i Nazwisko:

Numer indeksu:

Zadanie 1. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = 2x^3 + y^3 - 12$ na $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 2. Rozwinąć w szereg MacLaurina funkcję $f(x, y) = \cos(x + 2y)$.

Zadanie 3. Zbadać, czy zbiór

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$$

jest rozmaitością. Jeśli tak, to wyznaczyć jej wymiar oraz znaleźć $T(p, S)$ i $N(p, S)$, gdzie $p = (1, -1, 0)$.

Zadanie 4. Obliczyć całkę

$$\iint_D 2x - y \, dx \, dy,$$

gdzie pole obszaru D jest ograniczone krzywymi $y = x^2$, $y = 2x$ i $y = x$.

Zadanie 5. Korzystając z zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe r i α obliczyć

$$\iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} - xy^2 \, dx \, dy,$$

gdzie obszar D jest ograniczony krzywymi $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, $y = 0$, $y = -x$ ($x \geq 0$).

Zadanie 6. Zbadaj ciągłość funkcji $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy \sin y}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Zadanie 7. Sprawdź, czy odwzorowanie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ dane wzorem

$$f(x, y) = (e^{2x-y}, e^{3x+y})$$

jest dyfeomorfizmem.

Zadanie 8. Korzystając z twierdzenia Greena obliczyć całkę krzywolinową zorientowaną

$$\oint_{\gamma} (x - x^2)y + \sin(x^2) \, dx + x(1 + y^2) + \ln(y^6 + 1) \, dy,$$

gdzie γ — okrąg $x^2 + y^2 = 1$ zorientowany dodatnio.

Egzamin z analizy wektorowej. Zestaw C. 11 II 2022

Imię i Nazwisko:

Numer indeksu:

Zadanie 1. Korzystając z twierdzenia o mnożnikach Lagrange’a znaleźć ekstrema warunkowe funkcji $f(x, y) = x - 5y$ na zbiorze $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 = 9\}$.

Zadanie 2. Znaleźć $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ jeśli $f(e^x y^2, 2x - y + z, z + x) = 0$, gdzie f jest klasy C^1 .

Zadanie 3. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = 8x^3 + y^3 - 12xy$ na $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 4. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_D (y^2 - 2xy) \, dx \, dy,$$

gdzie zbiór D jest trójkątem ograniczonym prostą $4x + 2y = 4$ i osiami współrzędnych.

Zadanie 5. Korzystając z zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe r i α obliczyć

$$\iint_D y \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 y \, dx \, dy,$$

gdzie obszar D jest ograniczony krzywymi $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, $x = 0$, $y = -x$ ($y \leq 0$).

Zadanie 6. Zbadać ciągłość i różniczkowalność w punkcie $(0, 0)$ funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y + x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Zadanie 7. Pokazać, że odwzorowanie $\phi(t) = (2 - \cos t, \sin t, t + 2)$ jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}$ na obraz $\phi(\mathbb{R})$. Znaleźć przestrzeń styczną i prostą styczną do $\phi(\mathbb{R})$ w punkcie $(1, 0, 3)$.

Zadanie 8. Sprawdzić, czy podana całka krzywoliniowa zorientowana

$$\int_{\gamma} (y^3 \cos x + 4e^{3x}) \, dx + (3y^2 \sin x + \sin y) \, dy,$$

gdzie γ — krzywa o początku $A = (1, 0)$ i końcu $B = (2, 3)$ nie zależy od kształtu krzywej całkowania i jeśli tak to ją obliczyć.

Egzamin z analizy wektorowej. Zestaw D. 11 II 2022

Imię i Nazwisko:

Numer indeksu:

Zadanie 1. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = x^3 + 2y^3 - 12$ na $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 2. Rozwinąć w szereg MacLaurina funkcję $f(x, y) = \sin(3x + y)$.

Zadanie 3. Zbadać, czy zbiór

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$$

jest rozmaitością. Jeśli tak, to wyznaczyć jej wymiar oraz znaleźć $T(p, S)$ i $N(p, S)$, gdzie $p = (1, -1, 0)$.

Zadanie 4. Obliczyć całkę

$$\iint_D x + 4y \, dx \, dy,$$

gdzie pole obszaru D jest ograniczone krzywymi $y = x^2$, $y = 2x$ i $y = x$.

Zadanie 5. Korzystając z zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe r i α obliczyć

$$\iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} - xy^2 \, dx \, dy,$$

gdzie obszar D jest ograniczony krzywymi $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 16$, $y = 0$, $y = x$ ($x \geq 0$).

Zadanie 6. Zbadaj ciągłość funkcji $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin y}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Zadanie 7. Sprawdź, czy odwzorowanie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ dane wzorem

$$f(x, y) = (e^{x+2y}, e^{x-y})$$

jest dyfeomorfizmem.

Zadanie 8. Korzystając z twierdzenia Greena obliczyć całkę krzywolinową zorientowaną

$$\oint_{\gamma} (x - x^2)y + \cos(x^2) \, dx + x(1 + y^2) + \ln(y^4 + 1) \, dy,$$

gdzie γ — okrąg $x^2 + y^2 = 4$ zorientowany dodatnio.