

Literatura:

①

- 1° Gewart, Skowrylas, „Analiza matematyczna 2”, Oficyna Wydawnicza GIS
- 2° Gewart, Skowrylas, „Elementy analizy wektorowej”, Oficyna Wydawnicza GIS
- 3° Krywicki, Włodarski, „Analiza matematyczna w zadaniach”, tom 2, PWN
- 4° Banaś, Wędrzychowicz, „Zbiór zadań z analizy matematycznej”, WNT

$$\begin{aligned} \text{Int } A &= \\ &= \{(x, y) : -1 < x < 3, y > 0\} \end{aligned}$$

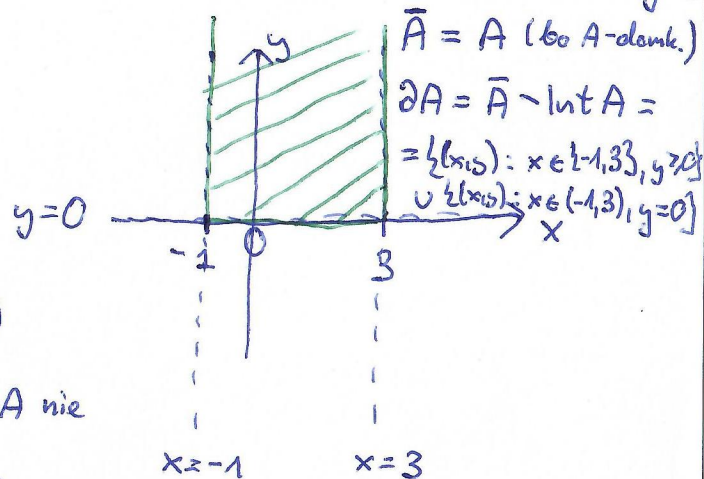
Rozwiązania zadań:

Zad 1

$$1. A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 3, y \geq 0\}$$

- nieograniczony (zawiera półoś $\{(0, y) : y \geq 0\}$)
- nie jest otwarty (np. żadna kula o środku w $(0, 0) \in A$ nie jest w nim zawarta)
- jest domknięty (bo zawiera brzeg - wszędzie są nierówności nieostre)

Zbiór punktów skupienia $A = A$ (bo A domknięty i nie ma punktów izolowanych)
Zbiór punktów izolowanych $A = \emptyset$



2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \cancel{x^2+y^2} > 4\}$

- nieograniczony (np zawiera półprostą $\{(x,0) : x > 2\}$)

- otwarty (same ostre nierówności)

- nie jest domknięty (kula o środku (2,0) nie jest

zawarta w dopełnieniu)

Zbiór punktów skupienia $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 4\}$

Zbiór punktów izolowanych $B = \emptyset$ (wszystkie punkty B są punktami skupienia)

3. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| < 1\}$

- nieograniczony (np zawiera półprostą $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$)

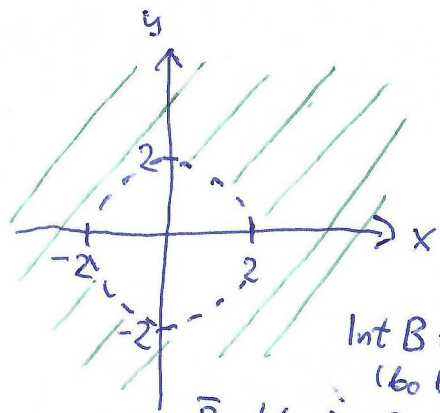
- otwarty

- nie jest domknięty (np kula o środku (1,1) nie jest zawarta w dopełnieniu)

Zbiór punktów skupienia $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| \leq 1\}$

Zbiór punktów izolowanych $C = \emptyset$ (wszystkie punkty C są punktami skupienia)

$\text{Int } C = C$ (C -otwarty), $\bar{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| \leq 1\}$, $\partial C = \bar{C} \setminus \text{Int } C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| = 1\}$

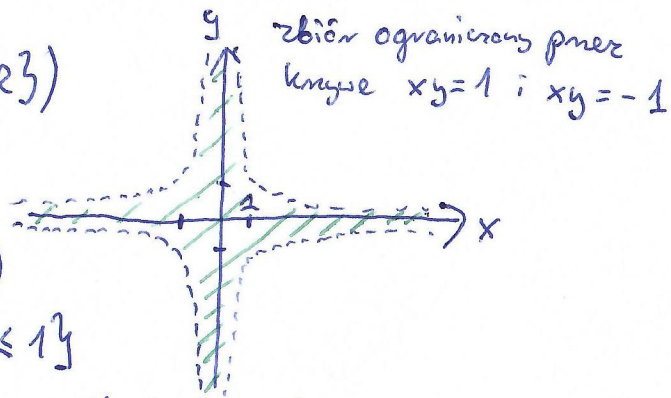


$\text{Int } B = B$

(bo B -otwarty)

$\bar{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 4\}$

$\partial B = \bar{B} \setminus \text{Int } B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\}$

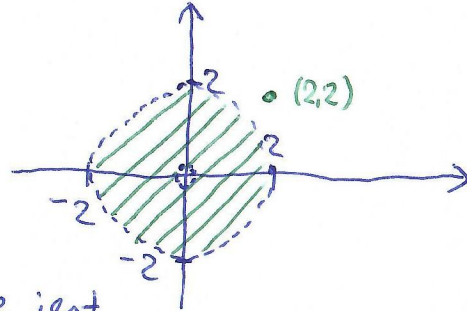


zbiór ograniczony przez
krzywe $xy=1$ i $xy=-1$

③

$$4. D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 4\} \cup \{(2, 2)\}$$

- jest ograniczony (np D jest zawarte w kuli $B(0, 3)$)
- nie jest otwarty (żadna kula o środku w $(2, 2)$ nie jest zawarta w D)
- nie jest domknięty (żadna kula o środku w $(0, 0)$ nie jest zawarta w dopełnieniu D)



Zbiór punktów skupienia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ (domknięcie D z odłączonymi punktami izolowanymi)

Zbiór punktów izolowanych $D = \{(2, 2)\}$ (jeden punkt D , który nie jest punktem skupienia)

$$\text{Int } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 4\}$$

$$\bar{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} \cup \{(2, 2)\}$$

$$\partial D = \bar{D} \setminus \text{Int } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\} \cup \{(0, 0), (2, 2)\}$$

5. $E = \{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \}$



3

- nie jest ograniczony ($\forall R < \infty \exists q \in E$ t. że $q > R$ (tzn $q \notin (-R, R)$) $E = \mathbb{Q}_+ = \{ q \in \mathbb{Q} : q > 0 \}$
- nie jest otwarty (np żadna kula o środku w 1 nie jest zawarta w E)
- nie jest domknięty (np żadna kula o środku w 0 nie jest zawarta w $\mathbb{R} \setminus E$)

Zbiór punktów skupienia $E = [0, \infty)$ (t)

Zbiór punktów izolowanych $E = \emptyset$

$\text{Int } E = \emptyset$ (żaden przedział nie jest zawarty w E) t. że $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = x < \infty$ $\mathbb{Q}$ jest gęste w $\mathbb{R}$

$\overline{E} = [0, \infty)$ $\partial E = [0, \infty)$

6 $F = \{ (-1)^n (1 + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N} \}$



- jest ograniczony $E \subset (-3, 3)$
- nie jest otwarty (np żadna kula o środku w -2 nie jest zawarta w E)
- nie jest domknięty (np żadna kula o środku w 1 nie jest zawarta w $\mathbb{R} \setminus E$)

Zbiór punktów skupienia $E = \{-1, 1\}$ bo $(1 + \frac{1}{2k+1}) \rightarrow -1$, $1 + \frac{1}{2k} \rightarrow 1$

Zbiór punktów izolowanych $E = E$

$\text{Int } E = \emptyset$, $\overline{E} = E \cup \{-1, 1\}$ $\partial E = E \cup \{-1, 1\}$

Zad 1,5

Niech $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^k |x_i|$; $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, k} |x_i|$

$B_1(0,1) = ?$

$B_\infty(0,1) = ?$

$B_1(0,1) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1 \}$

Żeby móc narysować ten zbiór musimy rozważyć 4 przypadki:

1) $x > 0, y > 0$

$x+y < 1 \Rightarrow y < 1-x$

2) $x > 0, y < 0$

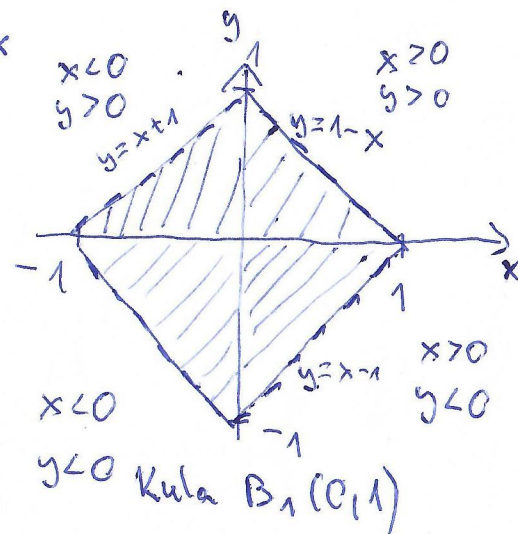
$x-y < 1 \Rightarrow y > x-1$

3) $x < 0, y > 0$

$-x+y < 1 \Rightarrow y < 1+x$

4) $x < 0, y < 0$

$-x-y < 1 \Rightarrow y > -x-1$



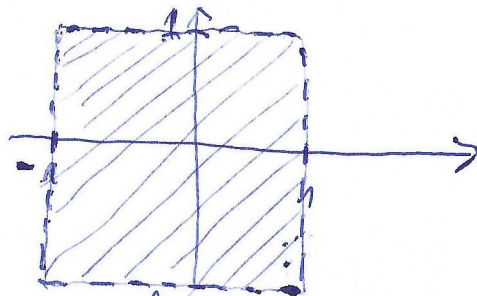
$$B_\infty(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} < 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}$$

$$= (-1,1) \times (-1,1)$$

Def

Mówimy, że dwie normy $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|$ są równoważne

jeśli istnieją stałe $c, C > 0$ takie, że $c\|x\| \leq \|x\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^k$



• Pokażemy, że normy $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|$ (norma euklidesowa) są równoważne

Wiedz $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$

$$\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_k^2 \leq (|x_1| + \dots + |x_k|)^2 = \|x\|_1^2 \Rightarrow \|x\| \leq \|x\|_1$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_k| \leq k\|x\| \quad (\text{bo } |x_i| \leq \|x\| \text{ dla } i=1, \dots, k) \Rightarrow \|x\|_1 \leq k\|x\|$$

$\left. \begin{array}{l} \|x\| \leq \|x\|_1 \leq k\|x\| \\ \|x\|_1 \leq k\|x\| \end{array} \right\} \Rightarrow \|x\| \text{ i } \|x\|_1 \text{ są równoważne}$

• Pokażemy, że normy $\|\cdot\|_\infty$ i $\|\cdot\|$ są równoważne:

$$\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_k^2 \leq k\|x\|_\infty^2 \quad (\text{bo } x_i^2 \leq \max_{j=1, \dots, k} |x_j|^2) \Rightarrow \|x\| \leq \sqrt{k}\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty = \max_{j=1, \dots, k} |x_j| \leq \|x\|$$

$\left. \begin{array}{l} \|x\| \leq \sqrt{k}\|x\|_\infty \\ \|x\|_\infty \leq \|x\| \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}}\|x\| \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|$
 $\|x\| \text{ i } \|x\|_\infty \text{ są równoważne}$